目　录

第一章　可测空间

§1　集类与 σ 域

一、集合及其运算

1　设 Ω 是一个抽象空间，即一个非空集合，它的元素称为点，一般用 ω 表示．由某些点构成的集合将用 $A, B, \cdots\cdots$ 等大写字母表示．$\omega \in A$ 表示 ω 为 A 的一个元素，也称 ω 属于 A．空集也看为 Ω 的一个子集，表以 $\varnothing$．象通常一样，若集 A 的元素都是集 B 的元素，那么称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$．若 $A \subset B$，同时 $B \subset A$，即 A, B 由相同的元素构成，则记为 $A = B$，称 A, B 是相等的．

2　对于 Ω 的子集，常用到下列一些运算：

并：$A \cup B$，$\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$，$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$．

$A \cup B$ 是由至少属于 A, B 之中一个集合的元素全体构成的集合，$\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 由 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 中诸集 A_α 的元素全体构成，即 $\omega \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 当且仅当至少有一个 $\alpha_0 \in I$，使 $\omega \in A_{\alpha_0}$．

交：$A \cap B$，$\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$，$\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$．

$A \cap B$ 是由同时属于 A 及 B 的元素构成的集合，$\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 由同时属于 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ 中每个集合的元素全体构成，即 $\omega \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ 当且仅当对每个 $\alpha \in I$，$\omega \in A_\alpha$．$A \cap B$ 也记为 AB．

余集：A^c

A^c 是由 Ω 中不属于 A 的元素全体构成的集合．

差：$A \setminus B = A \cap B^c$．

对称差：$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$．

特别地若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A,B 为互不相交的．对两两互不相交的 $\{A_\alpha\}$，常用 $\sum\limits_\alpha A_\alpha$ 表示 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$，也称之为 $\{A_\alpha\}$ 之和．若 $B\subset A$，则常用 $A-B$ 表示 $A\setminus B$．

为方便计，我们还约定，若指标集 $I=\{\alpha\}$ 是空集，则

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\varnothing,\qquad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\Omega$$

3 对于集合运算，下列性质是基本的：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$．

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．

分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cap BC$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$．

De Morgan 法则：$(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)^c=\bigcap\limits_\alpha A_\alpha^c$，$(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)^c=\bigcup\limits_\alpha A_\alpha^c$．

4 对集合序列 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $\{A_n\}$ 的上限点集，也记为 $\overline{\lim\limits_n}\,A_n$ 或 $\limsup\limits_n A_n$，它由 Ω 中属于无限多个 A_n 的那些元素构成．称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$ 为 $\{A_n\}$ 的下限点集，也记为 $\underline{\lim\limits_n}\,A_n$ 或 $\liminf\limits_n A_n$，它由 Ω 中自某个指标 $n_0(\omega)$ 后属于集列中所有 A_n 的那些元素 ω 构成．当 $\underline{\lim\limits_n}\,A_n=\overline{\lim\limits_n}\,A_n$ 时，称 $\{A_n\}$ 有极限，并记 $\lim\limits_n A_n=\overline{\lim}\,A_n$，称它为 $\{A_n\}$ 的极限．

5 对 $A\subset\Omega$，考虑 Ω 上的函数

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\in A^c.\end{cases}$$

I_A 称为集 A 的示性函数．集合的运算与示性函数的运算有密切的关系：

$$I_{\bigcup\limits_\alpha A_\alpha}=\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\ \left(\bigvee_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\sup_\alpha I_{A_\alpha}\right),\quad I_{\sum\limits_\alpha A_\alpha}=\sum_\alpha I_{A_\alpha},$$

$$I_{\bigcap\limits_\alpha A_\alpha}=\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\ \left(\bigwedge_\alpha I_{A_\alpha}\triangleq\inf_\alpha I_{A_\alpha}\right),$$

$$I_{A^c}=1-I_A,$$

$$I_{A-B}=I_A-I_B,$$

$$I_{A\triangle B}=|I_A-I_B|=I_A+I_B\pmod 2).$$

6　命题（首次进入分解）　给定集合 $\{A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$，则

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i \setminus \bigcup_{j\leqslant i-1} A_j\right). \tag{6.1}$$

证　对 $n=1$(6.1)是显然的．若取 $A=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$，$B=A_{k+1}$，则由 $A\cup B=A+(B\setminus A)$ 便由 $n=k$ 推出 $n=k+1$ 时(6.1)也成立．#

上述命题的直观解释是：若 $\omega\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，则必有一个最小的 i，使 ω 属于 A_i 而不属于 $A_1,\cdots,A_{i-1}$ 中任一个．(6.1)右端便是对 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 中的元素按每个元素首先属于哪一个 A_i 进行分解．

二、集类与 σ 域

由 Ω 中子集构成的集合称为集类，我们将用花体字母 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$ 等来表示，而 $\mathscr{P}(\Omega)$ 表示由 Ω 的子集全体构成的集类．

7　定义　$\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集类 $\mathscr{A}$ 称为域（或代数），假定它满足

i) 若 $A\in\mathscr{A}$，则 $A^c\in\mathscr{A}$，

ii) 若 $A\in\mathscr{A}$，$B\in\mathscr{A}$，则 $A\cup B\in\mathscr{A}$．

8　命题　设 $\mathscr{A}$ 是域，则 i) $\Omega\in\mathscr{A}$，$\varnothing\in\mathscr{A}$．

ii) 若 $A,B\in\mathscr{A}$，则 $AB\in\mathscr{A}$，$A\setminus B\in\mathscr{A}$，$A\triangle B\in\mathscr{A}$．

iii) 若 $A_j\in\mathscr{A}$，$1\leqslant j\leqslant n$，则 $\bigcup_{j=1}^{n} A_j\in\mathscr{A}$，$\bigcap_{j=1}^{n} A_j\in\mathscr{A}$．

证　i) 因 $\mathscr{A}$ 非空，存在 $A\in\mathscr{A}$，则 $A^c\in\mathscr{A}$，且

$$\Omega=A\cup A^c\in\mathscr{A},\quad \varnothing=\Omega^c\in\mathscr{A}.$$

ii) $AB=(A^c\cup B^c)^c\in\mathscr{A}$，$A\setminus B=AB^c\in\mathscr{A}$，

$$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\in\mathscr{A}.$$

iii) 由归纳法即得．#

注　与域类似的还有环，$\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{R}$ 称为环，若当 $A\in\mathscr{R}$，$B\in\mathscr{R}$ 时，必有 $A\setminus B\in\mathscr{R}$，$A\cup B\in\mathscr{R}$．即环是关于差、并运算封闭的集类．容易说明，若 $\mathscr{A}$ 为域，则 $\mathscr{A}$ 必为含 Ω 的环．若 $\mathscr{R}$ 为环，则 $\varnothing\in\mathscr{R}$，且它对交、对称差运算是封闭的．当环 $\mathscr{R}$ 含 Ω 时，$\mathscr{R}$ 必为域．

9　例　i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个域．

ii) $\mathscr{A}=\{\varnothing, \Omega\}$ 是一个域.

iii) 若 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 的有限子集全体构成的集类,则 $\mathscr{C}$ 是一个环. 当 Ω 本身是无限集时, $\mathscr{C}$ 不是一个域. 若 $\mathscr{D}$ 是 Ω 中有限子集及其余集全体构成的集类,则 $\mathscr{D}$ 是一个域.

iv) 直线 $\mathscr{R}$ 上形为 $]a,b]$ (a,b 可为无穷)的区间的有限并的全体为一个域.

10 命题 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$, 即 $\mathscr{A}$ 为域, $\mathscr{A}\supset\mathscr{C}$, 且对任一域 $\mathscr{A}'\supset\mathscr{C}$, 必有 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}'$.

证 首先记 $\mathscr{X}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的域的全体构成的集合,则因为 $\mathscr{P}(\Omega)\in\mathscr{X}$, 所以 $\mathscr{X}$ 是非空的. 又因任意个包含 $\mathscr{C}$ 的域的交仍是一个包含 $\mathscr{C}$ 的域(请按域的定义逐条验证),所以若取

$$\mathscr{A}=\bigcap_{\mathscr{B}\in\mathscr{X}}\mathscr{B}$$

则 $\mathscr{A}$ 就是所要求的. ∎

Ω 中由单点集全体张成的域就是由 Ω 中有限集及其余集全体构成的集类.

11 定义 对任一集类 $\mathscr{C}$, 包含 $\mathscr{C}$ 的最小域 $\mathscr{A}$ 称为由 $\mathscr{C}$ 生成的域, 记为 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

12 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{S}$ 称为半域(或半代数),若它满足:

i) $\varnothing, \Omega\in\mathscr{S}$;

ii) 当 $A,B\in\mathscr{S}$, 必有 $AB\in\mathscr{S}$;

iii) 若 $A\in\mathscr{S}$, 则 A^c 可表为 $\mathscr{S}$ 中两两互不相交集合的有限并.

13 例 i) 直线 $\boldsymbol{R}$ 上形为 $]a,b]$ (a,b 可为无穷) 的区间全体构成一个半域.

ii) n 维实空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,开、闭及半开半闭矩形体.

$$\{(x_1,\cdots,x_n):\ a_i<(\leqslant)x_i<(\leqslant)b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

全体也构成一个半域.

类似于命题 10, 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$, 则必有包含 $\mathscr{C}$ 的最小半域 $\mathscr{S}(\mathscr{C})$, 也称为由 $\mathscr{C}$ 生成的半域. 习题 10 构造性地给出了由 $\mathscr{C}$ 生成 $\mathscr{S}(\mathscr{C})$ 的办法,下列命题进一步给出由半域 $\mathscr{S}$ 构造 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 的方法.

14　命题　若$\mathscr{S}$为半域，则

$$\mathscr{A}=\{A=\sum_{i\in I}S_i:\{S_i,i\in I\}\text{为}\mathscr{S}\text{中互不相交的有限族}\}$$

是包含$\mathscr{S}$的最小域.

证　首先证明$\mathscr{A}$是一个域. $\mathscr{A}$对有限交封闭是显然的. 又若$A=\sum_{i=1}^{n}S_i\in\mathscr{A}$，则$A^c=\bigcap_{i=1}^{n}S_i^c$. 按半域的定义$S_i^c=\sum_{j=1}^{J_i}S_{ij}$, $S_{ij}\in\mathscr{S}$，所以

$$A^c=\bigcap_{i=1}^{n}S_i^c=\sum_{j_1=1}^{J_1}\cdots\sum_{j_n=1}^{J_n}\bigcap_{i=1}^{n}S_{ij_i}\in\mathscr{A}$$

由De Morgan法则，$\mathscr{A}$对有限并封闭，即$\mathscr{A}$是一个域. 此外$\mathscr{A}\supset\mathscr{S}$，若$\mathscr{A}'$也是一个包含$\mathscr{S}$的域，则对$S_i\in\mathscr{S}$，形为$A=\sum_{i=1}^{n}S_i$的集合必属于$\mathscr{A}'$，所以$\mathscr{A}'\supset\mathscr{A}$，即$\mathscr{A}$是最小的. ∎

15　定义　$\mathscr{P}(\Omega)$的非空子集$\mathscr{F}$称为σ域（或σ代数），若它满足：

i) 若$A\in\mathscr{F}$，则$A^c\in\mathscr{F}$；

ii) 若对$n\geq1$, $A_n\in\mathscr{F}$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$.

16　命题　若$\mathscr{F}$为σ域，则$\mathscr{F}$为一个域，且当$n\geq1$, $A_n\in\mathscr{F}$时，必有$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$, $\underline{\lim}_n A_n\in\mathscr{F}$, $\overline{\lim}_n A_n\in\mathscr{F}$.

证　若$A,B\in\mathscr{F}$,

$$A\cup B=A\cup B\cup B\cup B\cup\cdots\in\mathscr{F}$$

所以$\mathscr{F}$是一个域. 又

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c)^c\in\mathscr{F},$$

$$\underline{\lim}_n A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F},$$

$$\overline{\lim}_n A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}. ∎$$

注　与σ域类似的还有σ环. $\mathscr{P}(\Omega)$的非空子类$\mathscr{C}$称为σ环；若它满足：

i) 若$A\in\mathscr{C}$, $B\in\mathscr{C}$；则$A\setminus B\in\mathscr{C}$；

ii) 若对$n\geq1$, $A_n\in\mathscr{C}$，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$. 容易说明，$\mathscr{F}$为$\sigma$域的充要条件是$\mathscr{F}$为一个包含$\Omega$的$\sigma$环. 在$\sigma$环中，对可列个集合的交运算，

上限、下限运算也是封闭的.

17 命题 若$\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，则必存在包含$\mathscr{C}$的最小$\sigma$域.

证 同命题10.*

18 例 i) $\mathscr{P}(\Omega)$是一个σ域.

ii) $\mathscr{F}=\{\varnothing,\Omega\}$是一个$\sigma$域.

iii) 若$\mathscr{C}$表示Ω的有限或可列子集全体构成的集类，则$\mathscr{C}$是一个σ环. 若Ω本身不是可列集，则$\mathscr{C}$不是σ域. 若$\mathscr{F}$表示Ω中有限或可列子集及其余集全体构成的集类，则$\mathscr{F}$是一个σ域，它是包含Ω中一切单点集的最小σ域.

19 定义 包含$\mathscr{C}$的最小σ域称为由$\mathscr{C}$生成的σ域，记为$\sigma(\mathscr{C})$.

20 命题 对Ω的子集类$\mathscr{C}$，若以$\mathscr{C}\cap A$表示集类$\{BA:B\in\mathscr{C}\}$，则$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A=\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$，这里$\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$表示把$\mathscr{C}\cap A$看为$\mathscr{P}(A)$的子类在$A$上生成的$\sigma$域.

证 首先，$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\mathscr{C}\cap A$，又$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A$是$A$上的一个$\sigma$域(需按定义逐项验证)，故$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\supset\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$. 反之，令

$$\mathscr{D}=\{B:B\cap A\in\sigma_A(\mathscr{C}\cap A),\ B\subset\Omega\},$$

则$\mathscr{D}\supset\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$也是$\Omega$上的一个$\sigma$域(也需逐项验证)，故$\mathscr{D}\supset\sigma_\Omega(\mathscr{C})$，即$\sigma_\Omega(\mathscr{C})\cap A\subset\sigma_A(\mathscr{C}\cap A)$. 由此命题成立.*

21 命题 若$\boldsymbol{R}=]-\infty,\infty[$表数直线，则下列集类生成相同的$\sigma$域

i) $\{]a,b]:a,b\in\boldsymbol{R}\}$;

ii) $\{]-\infty,b]:b\in\boldsymbol{R}\}$;

iii) $\{[a,b]:a,b\in\boldsymbol{R}\}$.

iv) $\{]a,b[:a,b\in\boldsymbol{R}\}$;

v) $\{]r_1,r_2[:r_1,r_2$为有理数$\}$;

vi) $\{G:G$为$\boldsymbol{R}$中开集$\}$;

vii) $\{F:F$为$\boldsymbol{R}$中闭集$\}$.

证 由于$]a,b]=\bigcap\limits_n\left]a,b+\frac{1}{n}\right[$，$]a,b[=\bigcup\limits_n\left]a,b-\frac{1}{n}\right]$，所以i)，iv)的集类生成相同的$\sigma$域. 同样i)，iii)亦生成相同的$\sigma$域. 此外，由

$$]-\infty, b] = \bigcup_n]-n, b], \quad]a, b] =]-\infty, b] \setminus]-\infty, a]$$

i), ii) 生成相同的 σ 域. 由 $]a, b[= \bigcup_{a<r_1<r_2<b}]r_1, r_2[$ 可知 iv), v) 生成相同的 σ 域. 由于 $\boldsymbol{R}$ 中任一开集可表示为可列个开区间的并, 故 iv), vi) 生成相同的 σ 域. 利用开集的余集为闭集, 可知 vi), vii) 生成相同的 σ 域. #

22 定义 数直线 $\boldsymbol{R}$ 上由开集全体产生的 σ 域称为 Borel 域, 记为 $\mathscr{B}_R$ 或 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_R$ 中的集称为一维 Borel 集. 对广义的数直线 $\overline{\boldsymbol{R}} = [-\infty, +\infty]$, 由开集全体生成的 σ 域也称为 $\overline{\boldsymbol{R}}$ 上的 Borel 域, 其中的集也称为 Borel 集.

一般地, 若 E 为拓扑空间, $\mathscr{B}_E$ 表示由 E 中开集全体生成的 σ 域, 这一 σ 域称为 Borel 域, $\mathscr{B}_E$ 中的集称为 E 中的 Borel 集. n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Borel 点集又简称为 n 维 Borel 点集.

§2 单调类定理

1 定义 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{M}$ 称为单调类, 若对任一集合序列 $\{A_n, n\geqslant 1\} \subset \mathscr{M}$,

当 $\{A_n\}$ 递增时, 即 $A_n \subset A_{n+1}$, 必有 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$,

当 $\{A_n\}$ 递减时, 即 $A_n \supset A_{n+1}$, 必有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{M}$.

2 例 i) $\mathscr{P}(\Omega)$ 是一个单调类. 每个 σ 域也必是一个单调类;

ii) 若 $\boldsymbol{R} =]-\infty, +\infty[$, 则 $\{\varnothing, \boldsymbol{R},]-\infty, a],]-\infty, a[: a \in \boldsymbol{R}\}$ 为单调类, 但它不是域.

3 命题 若非空 $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, 则必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小单调类 $\mathscr{M}(\mathscr{C})$, 它也称为由 $\mathscr{C}$ 生成的单调类.

证 同命题 1.10. #

4 命题 $\mathscr{F}$ 为 σ 域的充要条件是 $\mathscr{F}$ 既是域又是单调类.

证 $\Rightarrow$(必要性) 由命题 1.16 得.

$\Leftarrow$(充分性) 对任一集合序列 $\{A_n, n\geqslant 1\} \subset \mathscr{F}$, 因为 $\mathscr{F}$ 是域,

所以，$B_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathscr{F}$，且因 B_n 为递增的，又由 $\mathscr{F}$ 为单调类 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{F}$，所以 $\mathscr{F}$ 是 σ 域. ∎

5 **定理**（单调类定理） 若 $\mathscr{A}$ 为域，则 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}(\mathscr{A})$.

证 首先，$\sigma(\mathscr{A})$ 是单调类，又 $\sigma(\mathscr{A})\supset\mathscr{A}$，所以

$$\sigma(\mathscr{A})\supset\mathscr{M}(\mathscr{A}).\tag{5.1}$$

反之，$\mathscr{A}\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，我们证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是一个 σ 域，若证明了这一点，则有 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 先证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对余集运算是封闭的. 记

$$\mathscr{M}'=\{A:A\text{ 及 }A^c\text{ 都属于 }\mathscr{M}(\mathscr{A})\},\tag{5.2}$$

我们将证明它是一个单调类. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathscr{M}'$ 中的单调序列，则 A_n，$A_n^c\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，且 $\lim\limits_n\uparrow A_n$（或 $\lim\limits_n\downarrow A_n$）$\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$（$\lim\limits_n\uparrow A_n$（表递增 A_n 的极限，$\lim\limits_n\downarrow A_n$ 表递减 A_n 的极限）. 由

$$(\lim_n\uparrow A_n)^c=\lim_n\downarrow A_n^c\ (\text{或}(\lim_n\downarrow A_n)^c=\lim_n\uparrow A_n^c)$$

可得$(\lim\limits_n\uparrow A_n)^c$（或$(\lim\limits_n\downarrow A_n)^c$）$\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，即 $\lim\limits_n\uparrow A_n$（或 $\lim\limits_n\downarrow A_n$）$\in\mathscr{M}'$，故得$\mathscr{M}'$ 是单调类，又 $\mathscr{M}'\supset\mathscr{A}$，所以 $\mathscr{M}'\supset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 因为 $\mathscr{M}'$中元素的余集在 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 中，所以 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对余集运算是封闭的.

再证明 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对并运算是封闭的. 对固定的 A，记

$$\mathscr{M}_A=\{B:B\in\mathscr{M}(\mathscr{A}),\ B\cup A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})\}.$$

当 $A\in\mathscr{A}$ 时，容易看出 $\mathscr{M}_A\supset\mathscr{A}$. 又对每个单调序列 $\{B_n,\ n\geqslant1\}$，由于等式 $\lim\limits_n(B_n\cup A)=(\lim\limits_n B_n)\cup A$，容易验证 $\mathscr{M}_A$ 是一个单调类，所以 $\mathscr{M}_A\supset\mathscr{M}(\mathscr{A})$. 又由 $\mathscr{M}_A\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$，所以只能是 $\mathscr{M}_A=\mathscr{M}(A)$. 这对每个 $A\in\mathscr{A}$ 都是对的，即对每个 $A\in\mathscr{A}$ 及 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$

$$A\cup B\in\mathscr{M}(\mathscr{A}).$$

进而容易看出，对 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 和 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$，

$$B\in\mathscr{M}_A\Longleftrightarrow A\in\mathscr{M}_B.$$

所以对每个 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 和任一个 $A\in\mathscr{A}$，都有 $A\in\mathscr{M}_B$. 同样，这表明 $\mathscr{A}\subset\mathscr{M}_B\subset\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对每个$B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 成立，故 $\mathscr{M}_B=\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对每个 $B\in\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 成立. 由此立即可推出$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 对并运算是封闭的. 所以

$\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 是一个域，也是一个单调类．由命题 4 可推得 $\mathscr{M}(\mathscr{A})$ 必是一个 σ 域，故 $\mathscr{M}(\mathscr{A})\supset\sigma(\mathscr{A})$．联合(5.1)即得 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{M}(\mathscr{A})$．#

下面我们再介绍概率论中常用的另一种单调类定理．

6 **定义** $\mathscr{P}(\Omega)$的非空子类$\mathscr{D}$称为π类，若当$A,B\in\mathscr{D}$时必有$AB\in\mathscr{D}$.

7 **定义** $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子类 $\mathscr{G}$ 称为λ类，若它满足

i) 当 $A\in\mathscr{G}$ 时必有 $A^c\in\mathscr{G}$;

ii) 当 $A,B\in\mathscr{G}$ 且 $AB=\varnothing$，必有 $A+B\in\mathscr{G}$;

iii) 对递增序列 $\{A_n,\ n\geqslant1\}\subset\mathscr{G}$，必有 $\lim\limits_n A_n\in\mathscr{G}$.

8 **命题** i) $\mathscr{F}$ 成为 σ 域的充要条件是它同时为 λ 类和 π 类．ii) 对 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的任一子类 $\mathscr{C}$，必存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 λ 类 $\lambda(\mathscr{C})$.

证 i) 直接验证．ii) 类似于命题 1.10．#

9 **定理** 若 $\mathscr{D}$ 为 π 类，则 $\lambda(\mathscr{D})=\sigma(\mathscr{D})$.

证 首先 $\sigma(\mathscr{D})\supset\mathscr{D}$，$\sigma(\mathscr{D})$ 为 λ 类，所以 $\sigma(\mathscr{D})\supset\lambda(\mathscr{D})$．反之，我们要证明 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类，依据这一点，由命题 8 可知 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 σ 域，即有 $\lambda(\mathscr{D})\supset\sigma(\mathscr{D})$，定理也就得证．

为证 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类，记

$$\mathscr{C}=\{A:A\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 且对每个 }D\in\mathscr{D}\text{ 有}A\,D\in\lambda(\mathscr{D})\}.$$

则 $\mathscr{C}\supset\mathscr{D}$，又当 $A\in\mathscr{C}$ 时利用 $DA^c=(D^c\cup A)^c=(D^c+DA)^c$ 可推出 $A^c\in\mathscr{C}$，进而容易验证 $\mathscr{C}$ 是 λ 类．所以 $\mathscr{C}\supset\lambda(\mathscr{D})$，即对每个 $D\in\mathscr{D}$ 及每个 $A\in\lambda(\mathscr{D})$ 都有$AD\in\lambda(\mathscr{D})$．再取

$$\mathscr{G}=\{D:D\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 且对每个 }A\in\lambda(\mathscr{D})\text{ 有 }AD\in\lambda(\mathscr{D})\},$$

则 $\mathscr{G}\supset\mathscr{D}$．同样可验证 $\mathscr{G}$ 是 λ 类，所以 $\mathscr{G}=\lambda(\mathscr{D})$．这就表明 $\lambda(\mathscr{D})$ 对交运算是封闭的，即 $\lambda(\mathscr{D})$ 是一个 π 类．#

10 **系** 若 $\mathscr{G}$ 是 λ 类，又 $\mathscr{D}$ 为 π 类，$\mathscr{G}\supset\mathscr{D}$，则$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{D})$.

§3 可测空间与乘积可测空间

一、可测空间

1 **定义** Ω 为一集合，$\mathscr{F}$ 为由 Ω 的子集构成的 σ 域，则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称

为可测空间．$\mathscr{F}$ 中的任一集合都称为 $\mathscr{F}$ 可测集，简称可测集．

2　在现代概率论中，概率论的许多概念都是借用集合论与测度论中的概念来定义的．若$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间．那么从概率论看它有如下含义：

Ω 表某一试验中可能结果全体，Ω 又称为**基本空间**．

Ω 的元素 ω 称为**基本事件**．

$\mathscr{F}$ 表随机事件全体，称为**事件 σ 域**．

对可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$，若 Ω，$\mathscr{F}$ 赋予上述含义，则$(\Omega,\mathscr{F})$也称为**概率可测空间**，这时 $\mathscr{F}$ 中的任一 A 都可称为**随机事件**或**事件**，A 对应于事件 $\tilde{A}$＝"在一次试验中 A 含有的任一基本事件出现"．

Ω 作为$\mathscr{F}$ 的元素称为**必然事件**．

$\varnothing$ 称为**不可能事件**．

事件 $A\cup B$ 或 $\bigcup\limits_n A_n$ 分别称为事件 A,B 或 $\{A_n\}$ 的**并**，分别表示 A,B 或 $\{A_n\}$ 中至少有一个发生的事件．

事件 $A\cap B$ 或 $\bigcap\limits_n A_n$ 分别称为事件 A,B 或 $\{A_n\}$ 的**交**，表示其同时发生的事件．

事件 A^c 称为 A 的**逆事件**，表示"A 不发生"的事件．

对集合运算的其它一些概念也同样适用于事件．例如 $AB=\varnothing$，则也称事件 A,B 是**互不相容的**．事件 $\varlimsup\limits_n A_n$ 又称为 $\{A_n\}$ 的**上限事件**，表示 $\{A_n\}$ 中有无限个同时发生的事件，所以也记作 $\{A_n\ i.o.\}=\varlimsup\limits_n A_n$．

以上是一种描述概率模型的公理化方法．另一方面，任一具体的概率模型，例如古典概型中各种模型也都符合这一要求．在古典概型中可取 Ω 为试验中可能结果全体，那么随机事件全体 $\mathscr{F}$ 就是 $\mathscr{P}(\Omega)$ 或其子类．为了合理地对事件进行运算，要求 $\mathscr{F}$ 是一个 σ 域，这既是必要的也是可能的．由于这样，本书对可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$与(基本事件空间 Ω，事件 σ 域 $\mathscr{F}$)，常常是不加区别的，对 $\mathscr{F}$ 中集合的运算与对事件的运算也常用同一术语和符号．这种做法在现代概率论中也是普遍采用的．

二、乘积可测空间

3 定义 若$(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$是$n$个可测空间，象通常一样，

$$\Omega=\{(\omega_1, \cdots, \omega_n): \omega_i\in\Omega_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$$

称为乘积空间，记为$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$．对$A_i\subset\Omega_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，集合

$$A=\{(\omega_1, \cdots, \omega_n): \omega_i\in A_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$$

称为矩形集，记为$A=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\times\cdots\times A_n$．特别地，当每个$A_i\in\mathscr{F}_i$时，$A=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}A_i$又称为可测矩形．

4 命题 若$(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$是$n$个可测空间．$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$，$\mathscr{C}$表示$\Omega$中可测矩形全体，则$\mathscr{C}$是一个半域，而互不相交的可测矩形的有限并全体$\mathscr{A}$就是一个域．

证 先验证$\mathscr{C}$是一个半域：

i) $\varnothing=\varnothing\times\cdots\times\varnothing\in\mathscr{C}$，$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i\in\mathscr{C}$．

ii) 若$A=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}A_i$，$B=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}B_i$，则$AB=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}A_iB_i\in\mathscr{C}$．

iii) 若$A=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}A_i$，则$A^c=\sum\limits_{i=1}^{n}A_1\times\cdots\times A_{i-1}\times A_i^c\times\Omega_{i+1}\times\cdots\times\Omega_n$
$\in\mathscr{C}$．再利用命题1.14即得$\mathscr{A}$是一个域．∗

5 定义 若$(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$ $1\leqslant i\leqslant n$是n个可测空间，$\mathscr{C}$表$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i$中可测矩形全体，则$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$称为乘积$\sigma$域，记为$\mathscr{F}=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i$．又$(\Omega, \mathscr{F})$称为乘积可测空间，记为$(\Omega, \mathscr{F})=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$．

6 命题 设$(\Omega_i, \mathscr{F}_i)$，$1\leqslant i\leqslant n$是$n$个可测空间，$1\leqslant m\leqslant n$，则

$$\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\Omega_i=(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{m}\Omega_i)\times(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=m+1}^{n}\Omega_i), \tag{6.1}$$

$$\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i=(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{m}\mathscr{F}_i)\times(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=m+1}^{n}\mathscr{F}_i), \tag{6.2}$$

$$\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}(\Omega_i, \mathscr{F}_i)=(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{m}(\Omega_i, \mathscr{F}_i))\times(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=m+1}^{n}(\Omega_i, \mathscr{F}_i)). \tag{6.3}$$

证 (6.1)是显然的. 为证(6.2),记

$$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}\Omega_i,\ \mathscr{H}_1=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{m}\mathscr{F}_i,\ \mathscr{H}_2=\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}\mathscr{F}_i,\ \mathscr{F}=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}\mathscr{F}_i$$

先证明,对 $A\in\mathscr{H}_1$

$$A\times\Omega_{m+1}\times\cdots\times\Omega_n\in\mathscr{F}. \tag{6.4}$$

记 $\mathscr{D}=\{A: A\in\mathscr{H}_1,\ A\times\Omega_{m+1}\times\cdots\times\Omega_n\in\mathscr{F}\}$. 容易验证, $\mathscr{D}$ 包含 $\mathscr{H}_1$中可测矩形全体 $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ 又是一个 σ 域, 故 $\mathscr{D}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{H}_1$, 即(6.4)成立. 同样可证,对 $B\in\mathscr{H}_2$, $\Omega_1\times\cdots\times\Omega_m\times B\in\mathscr{F}$.

现在来证明$\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2=\mathscr{F}$. 按乘积 σ 域的定义,

$$\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2=\sigma_\Omega(\{A\times B: A\in\mathscr{H}_1,\ B\in\mathscr{H}_2\}).$$

由于 $A\times B=(A\times\Omega_{m+1}\times\cdots\cdots\times\Omega_n)\cap(\Omega_1\times\cdots\cdots\times\Omega_m\times B)\in\mathscr{F}$, 所以$\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2\subset\mathscr{F}$. 反之, $\mathscr{F}=\sigma(\{\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}A_i: A_i\in\mathscr{F}_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\})$,由于

$$\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}A_i=(\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{m}A_i)\times(\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}A_i)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2,$$

所以 $\mathscr{F}\subset\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$, (6.2)得证. (6.3)是(6.1), (6.2)的直接推论. ∎

7 命题 若 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$, $1\leqslant i\leqslant n$ 为 n 个可测空间,

$$(\Omega,\mathscr{F})=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}(\Omega_i,\mathscr{F}_i),$$

则对任一 $A\in\mathscr{F}$ 及任意固定的$(\omega_1,\cdots,\omega_m)$,截口集

$$A(\omega_1,\cdots,\omega_m)=\{(\omega_{m+1},\cdots,\omega_n):(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in A\}\in\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}\mathscr{F}_i \tag{7.1}$$

证 对任意固定的$(\omega_1,\cdots,\omega_m)$, 记

$$\mathscr{G}=\left\{A: A\in\mathscr{F},\ A(\omega_1,\cdots,\omega_m)\in\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}\mathscr{F}_i\right\}.$$

若 $A=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}A_i$, $A_i\in\mathscr{F}_i$,则

$$A(\omega_1,\cdots,\omega_m)=\begin{cases}\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}A_i, & \text{当 } \omega_i\in A_i,1\leqslant i\leqslant m;\\ \varnothing, & \text{其它},\end{cases}$$

故 $A(\omega_1,\cdots,\omega_m)\in\mathop{\mathsf{X}}_{i=m+1}^{n}\mathscr{F}_i$, 因此以 $\mathscr{C}$ 表示 Ω 中可测矩形全体时便有 $\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$.

另一方面, $\mathscr{G}$ 是一个 σ 域:

i) 利用 $(A(\omega_1\cdots\omega_m))^c=(A^c)(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_m)$ 可得若 $A\in\mathscr{G}$ 则 $A^c\in\mathscr{G}$;

ii) 利用 $(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_m)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n(\omega_1\cdots\omega_m))$ 可得 $\mathscr{G}$ 对可列并运算是封闭的，所以 $\mathscr{G}$ 是一个 σ 域．$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$，即对 $\mathscr{F}$ 中任一 A 都满足(7.1)．#

8 定义 若 $(\Omega_\alpha,\mathscr{F}_\alpha)$，$\alpha\in J$ 为一族可测空间，则

$$\Omega=\{(\omega_\alpha,\ \alpha\in J):\omega_\alpha\in\Omega_\alpha,\ \alpha\in J\}$$

称为 $(\Omega_\alpha,\alpha\in J)$ 的乘积空间，记为 $\Omega=\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in J}\Omega_\alpha$．若 I 为 J 的有限子集，对 $A_\alpha\in\mathscr{F}_\alpha$，$\alpha\in I$，

$$B=\{(\omega_\alpha,\ \alpha\in J),\ \omega_\alpha\in A_\alpha,\ \alpha\in I,\ \omega_\alpha\in\Omega_\alpha,\ \alpha\in J\}$$

称为有限维基底可测矩形柱，简称有限维矩形柱，$\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in I}A_\alpha$ 称为 B 的底．

9 命题 若

$$\mathscr{C}=\bigcup_{I}\{B:B\text{ 为以 }\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in I}A_\alpha\text{ 为底的矩形柱},\ A_\alpha\in\mathscr{F}_\alpha,\ \alpha\in I\}\quad(9.1)$$

表示有限维基底可测矩形柱全体，其中 I 取遍 J 的一切有限子集，则 $\mathscr{C}$ 是半域．

证 仿命题 4．#

10 定义 对(9.1)规定的 $\mathscr{C}$，$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$ 称为 $\{\mathscr{F}_\alpha,\ \alpha\in J\}$ 的乘积 σ 域，记为 $\mathscr{F}=\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in J}\mathscr{F}_\alpha$．而 $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为乘积可测空间，记为 $(\Omega,\mathscr{F})=\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in J}(\Omega_\alpha,\mathscr{F}_\alpha)$．

11 定义 在 Ω 中，若 I 为 J 的任意子集，$A\in\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$，则

$$B=\{(\omega_\alpha,\ \alpha\in J):(\omega_\alpha,\ \alpha\in I)\in A,\ \omega_\alpha\in\Omega_\alpha,\ \alpha\in J\}$$

称为 Ω 中柱集．A 称为 B 的底．特别地，当 I 为有限指标集时，B 称为有限维基底可测柱集，当 I 为可列指标集时 B 称为可列维基底可测柱集，且分别简称为有限维或可列维柱集．

12 命题 若 $\{(\Omega_\alpha,\mathscr{F}_\alpha),\ \alpha\in J\}$ 为一族可测空间，J 为无限指标集，$(\Omega,\mathscr{F})=\mathop{\mathsf{X}}_{\alpha\in J}(\Omega_\alpha,\mathscr{F}_\alpha)$，又 $\mathscr{G}$ 表 Ω 中可列维基底可测柱集全体，则 $\mathscr{F}=\mathscr{G}$．

证 首先我们来证明 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$．若 I 为 J 的任一至多为可列的子集，记

$\Omega_I=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha\in I}\Omega_\alpha$, $\mathscr{F}_I=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$,

$$\mathscr{H}=\{A: A\in\mathscr{F}_I,\ \Omega\text{ 中以 }A\text{ 为基底的柱集 }B\in\mathscr{F}\}.$$

若以$\mathscr{C}_I$记 Ω_I 中有限维可测矩形柱全体，则$\mathscr{H}\supset\mathscr{C}_I$，且不难验证$\mathscr{H}$是一个 σ 域，所以$\mathscr{F}_I\supset\mathscr{H}\supset\sigma(\mathscr{C}_I)=\mathscr{F}_I$，即 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$.

反之，若以$\mathscr{C}$表 Ω 中有限维基底可测矩形柱全体，则 $\mathscr{C}\subset\mathscr{G}$. 此外也不难验证 $\mathscr{G}$ 是 σ 域，所以 $\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$. 因而 $\mathscr{F}=\mathscr{G}$. ∎

注　从命题的证明中也不难推出，若记 $\mathscr{A}$ 为 Ω 中有限维基底可测柱集全体，则 $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$.

13　命题　若 $\{(E_i,\mathscr{T}_i),\ i\in I\}$为有限或可列个具有可列基的拓扑空间(特别地可以是可分可距离化空间)，$(E,\mathscr{T})=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}(E_i,\mathscr{T}_i)$ 为乘积拓扑空间，则

$$\mathscr{B}_E=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}\mathscr{B}_{E_i}. \tag{13.1}$$

$$(E,\mathscr{B}_E)=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}(E_i,\mathscr{B}_i). \tag{13.2}$$

其中$\mathscr{B}_{E_i}=\sigma(\mathscr{T}_i)$，$i\in I$，$\mathscr{B}_E=\sigma(\mathscr{T})$

证　首先若记 $\mathscr{D}=\{D: D\subset E,\ D$ 为有限维矩形柱，且其基底为开集$\}$，则因为 $\mathscr{D}$ 中每个元素 D 可表为 $D=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}C_i$，$C_i$ 为 E_i 中开集，且除有限个 i 外 $C_i=E_i$，故 $D\in\mathscr{T}$，$\mathscr{D}\subset\mathscr{T}$，$\sigma(\mathscr{D})\subset\mathscr{B}_E$. 容易看出，$\sigma(\mathscr{D})$ 包含一切有限维可测柱集，因而 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}\mathscr{B}_{E_i}\subset\mathscr{B}_E$(这一点没有用到$\mathscr{T}_i$具有可列基这一特性).

反之，若 $\mathscr{L}_i$ 表$\mathscr{T}_i$的可列基，不妨设 $E_i\in\mathscr{L}_i$. 记

$$\mathscr{C}=\{\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}U_i,\ U_i\in\mathscr{L}_i,\text{ 且除有限个 }i\text{ 外 }U_i=E_i\},$$

则$\mathscr{C}$是$\mathscr{T}$的可列基，且$\mathscr{C}\subset\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}\mathscr{B}_{E_i}$，因而$\mathscr{T}\subset\sigma(\mathscr{C})\subset\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}\mathscr{B}_{E_i}$，故

$$\mathscr{B}_E=\sigma(\mathscr{T})\subset\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i\in I}\mathscr{B}_{E_i}.$$

这就证明了(13.1). (13.2) 是(13.1)的直接推论. ∎

14　注　若$\mathbf{R}^n$表 n 维欧氏空间，即数直线 $\mathbf{R}$ 的 n 重乘积空间，$\mathscr{B}^n$ 表 $\mathbf{R}^n$ 中 Borel 点集全体，由于 R 是可分距离空间，因而由命题 13，

$$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)=\underbrace{(R,\mathscr{B})\times\cdots\cdots\times(\mathbf{R},\mathscr{B})}_{n\text{ 重}}.$$

$\mathscr{B}^n$ 也可以看为由可测矩形，或有理端点开矩形全体生成的 σ 域.

§4　可测映照与随机变量

一、可测映照

1　定义　f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照，即对每个 $\omega_1\in\Omega_1$，存在确定的 $\omega_2=f(\omega_1)\in\Omega_2$. 对 $A_2\in\Omega_2$，

$$f^{-1}(A_2)=\{\omega_1: f(\omega_1)\in A_2,\ \omega_1\in\Omega_1\}$$

称为 A_2 的原象. 对 $\mathscr{S}(\Omega_2)$ 的子类 $\mathscr{A}_2$，

$$f^{-1}(\mathscr{A}_2)=\{f^{-1}(A_2): A_2\in\mathscr{A}_2\}$$

称为 $\mathscr{A}_2$ 的原象.

2　命题　f 为 Ω_1 到 Ω_2 的任一映照，则有

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\ f^{-1}(\Omega_2)=\Omega_1,\\
&(f^{-1}(A))^c=f^{-1}(A^c),\\
&f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha),\\
&f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha),\\
&f^{-1}(\sum_\alpha A_\alpha)=\sum_\alpha f^{-1}(A_\alpha).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

证　命题中各式都可直接验证之. 例如对(2.1)因为对每个 α_0，$\bigcap_\alpha A_\alpha\subset A_{\alpha_0}$，故 $f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset f^{-1}(A_{\alpha_0})$，进而有

$$f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha).\tag{2.2}$$

反之，若 $\omega_0\in\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$，则对每个 α_0，$\omega_0\in f^{-1}(A_{\alpha_0})$ 即 $f(\omega_0)\in A_{\alpha_0}$，故 $f(\omega_0)\in\bigcap_\alpha A_\alpha$，进而有 $\omega_0\in f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha)$，即

$$\bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)\subset f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha),\tag{2.3}$$

比较(2.2)，(2.3)即得(2.1). *

3　注　i) 由命题2可见，f^{-1} 与集合的并、交、余集、差、对称差等运算都是可交换的，而且也不限于可列运算. 由此容易推出 Ω_2 上任一 σ 域 $\mathscr{G}$ 的原象对余集和可列并运算必是封闭的，因而 $f^{-1}(\mathscr{G})$ 是 Ω_1 中的 σ 域.

ii) 若 $A_1\subset\Omega_1$，规定 $f(A_1)=\{f(\omega_1):\omega\in A_1\}$，则 $f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha)$ 总是成立的，即 f 与并运算是可交换的，但取余集与交的运算与 f 未必是可交换的.

4 **引理** 设 f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照，$\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{P}(\Omega_2)$ 的子类，则

$$\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))=f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})). \tag{4.1}$$

证 由 $\mathscr{C}\subset\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})$，故 $f^{-1}(\mathscr{C})\subset f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))$. 由注 3，$f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))$ 是一个 σ 域，所以 $\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))\subset f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))$. 另一方面，令

$$\mathscr{G}=\{B: f^{-1}(B)\in\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C}))\},$$

则 $\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$，且由命题 2，$\mathscr{G}$ 也是 σ 域，所以 $\mathscr{G}\supset\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C})$，即

$$f^{-1}(\sigma_{\Omega_2}(\mathscr{C}))\subset\sigma_{\Omega_1}(f^{-1}(\mathscr{C})),$$

故(4.1)成立. #

5 **定义** 设 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为可测空间，f 为 Ω_1 到 Ω_2 的映照. 若对每个 $A\in\mathscr{F}_2$，$f^{-1}(A)\in\mathscr{F}_1$ 或等价地 $f^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$，则称 f 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的可测映照，记为 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$，并记 $\sigma(f)=\sigma_{\Omega_1}(f)=f^{-1}(\mathscr{F}_2)$，称它为由 f 生成的 σ 域.

6 **例** i) 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)=(\Omega_1,\mathscr{P}(\Omega_1))$，则 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的任一映照都是可测的.

ii) 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)=(\Omega_1,\{\varnothing,\Omega_1\})$，则 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(R,\mathscr{B})$ 的可测映照 f 在 Ω_1 上只取同一个值.

7 **命题** 若 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$，$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为可测空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega_2)$，又 $\mathscr{F}_2=\sigma(\mathscr{C})$，则 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$ 的充要条件是 $f^{-1}(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}_1$.

证 $\Rightarrow\mathscr{C}\subset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}_2$，故 $f^{-1}(\mathscr{C})\subset f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))=f^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$.

$\Leftarrow$由引理 4，$f^{-1}(\mathscr{F}_2)=f^{-1}(\sigma(\mathscr{C}))=\sigma(f^{-1}(\mathscr{C}))\subset\mathscr{F}_1$. #

8 **命题** 设 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$，$i=1,2,3$，为可测空间. 若 g 为 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 的可测映照，又 f 为 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 到 $(\Omega_3,\mathscr{F}_3)$ 的可测映照，则 $f\circ g:(f\circ g)(\omega_1)=f(g(\omega_1))$ 是 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 到 $(\Omega_3,\mathscr{F}_3)$ 的可测映照.

证 按复合映照的定义，对 $A\in\mathscr{F}_3$

$$(f\circ g)^{-1}(A)=\{\omega_1:f(g(\omega_1))\in A\}=\{\omega_1:g(\omega_1)\in f^{-1}(A)\}$$
$$=g^{-1}(f^{-1}(A)),$$

所以$(f\circ g)^{-1}(\mathscr{F}_3)=g^{-1}(f^{-1}(\mathscr{F}_3))\subset g^{-1}(\mathscr{F}_2)\subset\mathscr{F}_1$即 $f\circ g\in\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_3$. #

二、可测函数——随机变量

9 定义 由$(\Omega,\mathscr{F})$到$(R,\mathscr{B}_R)$(或$\overline{R},\mathscr{B}_{\overline{R}}$)的可测映照称为可测函数. 特别当$(\Omega,\mathscr{F})$为概率可测空间时,$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\overline{R},\mathscr{B}_{\overline{R}})$(或$(R,\mathscr{B}_R)$)的可测映照 X 称为随机变量(或有限实值随机变量),也记为 $X\in\mathscr{F}$.

以后常用 r.v.(random variable)作为随机变量的简写.下面我们常认为$(\Omega,\mathscr{F})$为概率可测空间并着重讨论 r.v.,这些结果对一般的可测函数也是成立的.

10 命题 若 $E=\{r_n\}$ 为 $\mathbf{R}$ 中稠密集,则 X 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的 r.v. 的充要条件是对每个 $r_n\in E$, $\{\omega:X(\omega)\leqslant r_n\}\in\mathscr{F}$.

证 $\Rightarrow\{\omega:X(\omega)\leqslant r_n\}=X^{-1}([-\infty,r_n])\in\mathscr{F}$.

$\Leftarrow$取 $\mathscr{C}=\{[-\infty,r_n],r_n\in E\}$则,$f^{-1}(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$ 且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}_{\overline{R}}$,由命题 7,$X\in\mathscr{F}/\mathscr{B}_{\overline{R}}$.

11 命题 若 $\{X_n,n\geqslant1\}$为 r.v. 序列,则 $\sup\limits_{n\geqslant1}X_n$, $\inf\limits_{n\geqslant1}X_n$, $\overline{\lim\limits_n}X_n$, $\underline{\lim\limits_n}X_n$ 都是 r.v..

证
$$\{\sup_n X_n\leqslant c\}=\bigcap_n\{X_n\leqslant c\}\in\mathscr{F},$$
$$\{\inf_n X_n<c\}=\bigcup_n\{X_n<c\}\in\mathscr{F},$$
$$\{\inf_n X_n\leqslant c\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{\inf X_n<c+\frac{1}{k}\}\in\mathscr{F}.$$

又
$$\overline{\lim_n}X_n=\inf_{k\geqslant1}\sup_{n\geqslant k}X_n\in\mathscr{F},$$
$$\underline{\lim_n}X_n=\sup_{k\geqslant1}\inf_{n\geqslant k}X_n\in\mathscr{F}.\ \#$$

12 定义 若存在$(\Omega,\mathscr{F})$的一个有限分割$\{A_i,i\in I\}$(即 I 为有限的,$A_i\in\mathscr{F}$,且 $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$, $\sum\limits_{i\in I}A_i=\Omega$)及互不相同的实数$\{x_i$,

$i\in I\}$ 使 Ω 上函数 X 可表为

$$X(\omega)=x_i,\text{当 } \omega\in A_i\,(i\in I),$$

则称 X 为阶梯 r.v.显然阶梯 r.v. 是 r.v.,且 x_i, A_i 由 X 唯一确定.

对 $A\in\mathscr{F}$, $I_A(\omega)$ 便是一个阶梯 r.v.,而上述 X 又可表为

$$X(\omega)=\sum_{i\in I}x_iI_{A_i}(\omega). \tag{12.1}$$

13 命题 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的阶梯 r.v. 全体 $\mathscr{E}$ 构成一个代数和格.

证 i) $\mathscr{E}$ 是一个线性空间.更精确地说,$\mathscr{E}$ 是由 $\{I_A, A\in\mathscr{F}\}$ 张成的线性空间.事实上,若 X, $Y\in\mathscr{E}$, $X=\sum_i x_iI_{A_i}$, $Y=\sum_j y_jI_{B_j}$, 则对任意实数 a, b, 有

$$aX+bY=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)I_{A_i}I_{B_j}.$$

若将诸 A_iB_j 中的空集除去,并把 ax_i+by_j 取相同值 z_k 的 A_iB_j 合并为一个集 C_K, 则 $aX+bY=\sum z_kI_{C_k}$, 其中 $\{z_k\}$ 互不相同, $\{C_k\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 的有限分割.

ii) $\mathscr{E}$ 是代数. 若 $X=\sum_i x_iI_{A_i}$, $Y=\sum_j y_jI_{B_j}$ 同为 $\mathscr{E}$ 中元素,则 $XY=\sum_{i,j}x_iy_jI_{A_iB_j}$. 作类似 i) 的归并亦可知 $XY\in\mathscr{E}$.

iii) $\mathscr{E}$ 是格,即采用实数自然顺序,当 $X, Y\in\mathscr{E}$ 时, 要证 $X\vee Y=\sup(X,Y)$, $X\wedge Y=\inf(X,Y)$ 也是 $\mathscr{E}$ 中元素. 若 $X=\sum_i x_iI_{A_i}$, $Y=\sum_j y_jI_{B_j}$, 则

$$X\vee Y=\sum_{i,j}(x_i\vee y_j)I_{A_iB_j},\quad X\wedge Y=\sum_{i,j}(x_i\wedge y_j)I_{A_iB_j}.$$

作类似 i) 的归并,也说明 $X\vee Y, X\wedge Y\in\mathscr{E}$.

14 命题 X 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v. 的充要条件是存在阶梯 r.v. 序列 $\{X_n, n\geq 1\}$, 使对每个 $\omega\in\Omega$ 都有

$$X(\omega)=\lim_{n\to\infty}X_n(\omega), \tag{14.1}$$

且当 X 为非负时, $\{X_n\}$ 可取成是非负递增的; 当 $|X|\leq M$ 时, $\{X_n\}$ 也可取成是 $|X_n|\leq M$ 的.

证 $\Leftarrow$由于 $X(\omega)=\overline{\lim_{n}} X_n(\omega)$，故由命题 11，$X$ 为 r.v..

$\Rightarrow$先设 X 为非负的，取

$$X_n=\sum_{k=0}^{n\cdot 2^n-1}\frac{k}{2^n}I\left\{\frac{k}{2^n}\leqslant X<\frac{k+1}{2^n}\right\}+nI_{\{X\geqslant n\}}, \qquad (14.2)$$

则 X_n 是阶梯 r.v. 在 $\{X<n\}$ 上，$0\leqslant X-X_n\leqslant\frac{1}{2^n}$；在 $\{X\geqslant n\}$ 上 $X_n=n\leqslant X$. 随 n 增加 X_n 是递增的. 故对每个 $\omega\in\Omega$，

$$X(\omega)=\lim_{n\to\infty} X_n(\omega).$$

对一般的 X，取 $X^+=X\vee 0, X^-=X\wedge 0$，则 X^+X^- 为 r.v.，且 $X=X^+-X^-$. 对 X^+,X^-，因为它们是非负的，所以分别存在点点收敛的阶梯 r.v. 序列 $\{Y_n\}$，$\{Z_n\}$，则 Y_n-Z_n 就是所要求的收敛于 X 的阶梯 r.v. 序列.

从 (14.2) 可看出，当 X 非负时，X_n 非负且递增地收敛于 X；当 $|X|\leqslant M$ 时，$|X_n|\leqslant M$. #

15 命题 i) 若 X，Y 为 r.v.，则对任意实数 a,b，只要 $aX+bY$，XY，X/Y 对每个 ω 有意义(即不发生 $+\infty+(-\infty)$，$0\cdot\infty$，$0/0$ ∞/∞ 等情况)，它们就都是 r.v.

ii) 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 r.v. 列，则 $\{\omega: \overline{\lim_{n}} X_n=\underline{\lim_{n}} X_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 可测的.

证 i) 是命题 13，14 的推论.

ii) 由命题 11，$\overline{\lim} X_n\in\mathscr{F}$，$\underline{\lim} X_n\in\mathscr{F}$，故

$\{\omega: \overline{\lim} X_n=\underline{\lim} X_n\}=\{\omega: \overline{\lim} X_n-\underline{\lim} X_n=0\}\in\mathscr{F}$. #

16 定义 若 X 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v.，又 $\mathscr{F}_1$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域. 若 $f\in\mathscr{F}_1/\mathscr{B}_{\bar{R}}$；则称 f 为 $\mathscr{F}_1$ 可测 r.v.，记为 $f\in\mathscr{F}_1$.

17 定理(Dood) 若 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照，$\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{E})$，则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v. X 为 $\sigma(f)$ 可测的充要条件是存在 $(E,\mathscr{E})$ 上 r.v. h 使 $X=h\circ f$.

证 $\Leftarrow X^{-1}(\mathscr{B}_{\bar{R}})=(h\circ f)^{-1}(\mathscr{B}_{\bar{R}})=f^{-1}(h^{-1}(\mathscr{B}_{\bar{R}}))\subset f^{-1}(\mathscr{E})=\sigma(f)$.

$\Rightarrow$若 $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i I_{A_i}$ 为 $\sigma(f)$ 可测阶梯r. v.，则由 $A_i\in\sigma(f)=f^{-1}(\mathscr{E})$，必存在 B_i 使 $A_i=f^{-1}(B_i)$，取 $C_i=B_i\setminus(\bigcup_{j<i}B_j)$，则 $\{C_i\}$ 为 $\mathscr{E}$ 中互不相交的集合，且

$$f^{-1}(C_i)=A_i\setminus(\bigcup_{j<i}A_j)=A_i.$$

令 $h=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i I_{C_i}$，则 h 为 $(E,\mathscr{E})$ 上r.v. 且当 $\omega\in A_i$ 时，$f(\omega)\in C_i$，$h(f(\omega))=\alpha_i=X(\omega)$，即 $X=h\circ f$.

对一般 X，由命题12，存在 $\sigma(f)$ 可测阶梯r. v. X_n，使 $X=\lim\limits_n X_n$，而 X_n 可表为 $X_n=h_n\circ f$，其中 h_n 为 $(E,\mathscr{E})$ 上r.v.，取

$$h=\overline{\lim}\, h_n,$$

则 h 为 $(E,\mathscr{E})$ 上r. v.，且 $h\circ f(\omega)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, h_n\circ f(\omega)=\lim\limits_n X_n(\omega)=X(\omega)$. ∗

三、单调类定理

18 定义 设 $\mathscr{L}$ 为 Ω 上的函数族，它满足：$X\in\mathscr{L}$ 时 $X^+,X^-\in\mathscr{L}$. Ω 上的函数族 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{L}$ 类，若它满足

i) $1\in\mathscr{H}$;

ii) $\mathscr{H}$ 是线性空间;

iii) 设 $X_n\geqslant 0$，$X_n\in\mathscr{H}$，$X_n\uparrow X$ 且 $X\in\mathscr{L}$ 或 X 有界，则 $X\in\mathscr{H}$.

概率论中经常用到下列函数形式的单调类定理.

19 定理 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，$\mathscr{C}$ 为 π 类. 又 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上的一个 $\mathscr{L}$ 类，且，$\mathscr{H}\supset\{I_A,A\in\mathscr{C}\}$，则 $\mathscr{H}$ 包含 Ω 上一切属于 $\mathscr{L}$ 的 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测函数.

证 取 $\mathscr{F}_1=\{A:I_A\in\mathscr{H}\}$，则 $\mathscr{F}_1\supset\mathscr{C}$. 我们来证明 $\mathscr{F}_1$ 是 λ 类. 由 i) ii) 知，若 $A\in\mathscr{F}_1$，则 $I_{A^c}=1-I_A\in\mathscr{H}$，故 $A^c\in\mathscr{F}_1$，若 $A,B\in\mathscr{F}_1$，且 $AB=\varnothing$，则 $I_{A+B}=I_A+I_B\in\mathscr{H}_1$，故 $A+B\in\mathscr{F}_1$. 又由 iii) 若 $\{A_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\mathscr{F}_1$ 中递增序列，则 $I_{\bigcup_n A_n}=\lim\limits_n\uparrow I_{A_n}\in\mathscr{H}$，故 $\bigcup\limits_n A_n\in\mathscr{F}_1$，所以 $\mathscr{F}_1$ 是一个 λ 类. 因此由定理2.9可知 $\mathscr{F}_1\supset\sigma(\mathscr{C})$.

利用 i), ii) 可知, $\mathscr{F}_1$ 可测有界阶梯 r.v. 都属于 $\mathscr{H}$. 最后利用命题 14 及 iii), 可推得非负的甚至一般的 $\mathscr{F}_1$ 可测函数 X, 只要它属于 $\mathscr{L}$, 都有 $X \in \mathscr{H}$ 定理由此获证. *

注 使用上述单调类定理时, $\mathscr{L}$ 常取为 Ω 上 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测函数全体、Ω 上有限可测函数全体或者其积分满足某些要求的 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测函数全体, 而 $\mathscr{H}$ 常取为具有待证的特定性质的函数全体, 这时上述定理常被用来证明属于 $\mathscr{L}$ 的 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测函数具有 $\mathscr{H}$ 所规定的特殊性质.

20 定理 若 $\mathscr{H}$ 为 Ω 上某些有界实函数的集合, 则存在 Ω 上 σ 域 $\mathscr{F}_1$, 使 $\mathscr{H}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}_1)$ 有界 r.v. 全体的充要条件是:

i) $\mathscr{H}$ 是线性空间;

ii) $1 \in \mathscr{H}$;

iii) $\mathscr{H}$ 是个格;

iv) 若 $\{f_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathscr{H}$ 中一致有界递增 r.v. 序列, $f = \lim\limits_n f_n$, 则 $f \in \mathscr{H}$,

且这时 $\mathscr{F}_1 = \sigma(f, f \in \mathscr{H}) \triangleq \sigma(\sigma(f), f \in \mathscr{H})$.

证 $\Rightarrow$ 由命题 11 及命题 15.

$\Leftarrow$ 取 $\mathscr{F}_1 = \{A : I_A \in \mathscr{H}\}$, 则 $\Omega \in \mathscr{F}_1$, 故 $\mathscr{F}_1$ 是非空的. 由 $\mathscr{H}$ 是一个格, 可推出 $\mathscr{F}_1$ 是 π 类. 又象定理 19 一样, 可证明 $\mathscr{F}_1$ 还是一个 λ 类, 因而由命题 2.8, $\mathscr{F}_1$ 是一个 σ 域.

利用 i), $\mathscr{F}_1$ 可测阶梯 r.v. 都属于 $\mathscr{H}$. 又利用命题 14, 一切非负有界 $\mathscr{F}_1$ 可测 r.v. 属于 $\mathscr{H}$, 最后利用 i), 任一有界 $\mathscr{F}_1$ 可测 r.v. 都属于 $\mathscr{H}$.

我们还需证明 $\mathscr{H}$ 中每个元素是 $\mathscr{F}_1$ 可测的. 若 $f \in \mathscr{H}$, 则对任一实数 a,

$$I_{(f>a)} = \lim_{n\to\infty} \uparrow \inf(1, n(f-a)^+).$$

利用 i)—iv), 不难说明上式右端是属于 $\mathscr{H}$ 的, 故 $(f>a) \in \mathscr{F}_1$, 即 f 是 $\mathscr{F}_1$ 可测的. 因而证明了 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{F}_1$ 有界可测 r.v. 全体.

最后还可证明 $\mathscr{F}_1 = \sigma(f, f \in \mathscr{H})$. 由 $\mathscr{F}_1$ 的定义, $\mathscr{F}_1 \subset \sigma(f, f \in \mathscr{H})$.

又由$\mathscr{H}$中元素$\mathscr{F}_1$可测，故$\sigma(f,f\in\mathscr{H})\subset\mathscr{F}_1$，所以有$\mathscr{F}_1=\sigma(f,f\in\mathscr{H})$. #

四、多维随机变量

21 定义 若$X_1,\cdots,X_n$为n个r.v.则$X=(X_1,\cdots,X_n)$称为n维随机变量，也称随机向量.

22 命题 $X=(X_1,\cdots,X_n)$为n维r.v.的充要条件是X为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$的可测映照，且$\sigma(X)=\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant n)$.

证 ⇒若$\mathscr{C}$为$\mathscr{B}^n$中可测矩形全体，对$A=\mathop{X}\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{C}$

$$X^{-1}(A)=\{\omega:X(\omega)\in A\}=\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:X_i(\omega)\in A_i\}=\bigcap_{i=1}^{n}X_i^{-1}(A_i)$$
$$\in\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant n)\subset\mathscr{F},$$

故$X^{-1}(\mathscr{C})\subset\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant n)\subset\mathscr{F}$. 由命题7$X$为$(\Omega,\mathscr{F})$到$(R^n,\mathscr{B}^n)$的可测映照，且$\sigma(X)\subset\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant n)$.

⇐对任一i, $1\leqslant i\leqslant n$, 若$A_i\in\mathscr{B}$, 取

$$A=\{(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_n),x_i\in A_i,x_j\in\overline{R},1\leqslant j\leqslant n\}\in\mathscr{B}^n,\text{则}$$
$$X^{-1}(A_i)=X^{-1}(A)\in\sigma(X)\subset\mathscr{F},$$

即X_i为r.v.且$\sigma(X_i)\subset\sigma(X)$. 故$X_1,\cdots,X_n$为$n$个r.v.，且$\sigma(X_i,1\leqslant i\leqslant n)\subset\sigma(X)$. #

23 定义 若f为$(\overline{\mathbf{R}}^n,\mathscr{B}^n)$到$(R,\mathscr{B})$的可测函数，则称$f$为$n$元的Borel可测函数或简称Borel函数. 类似地，可列维乘积空间$(\overline{\mathbf{R}}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$到$(\mathbf{R},\mathscr{B})$的可测函数也称为Borel函数.

24 命题 若$X=(X_1,\cdots,X_n)$为n维r.v.，则有限r.v.Y为$\sigma(X)$可测的充要条件是存在n元Borel函数$h(x_1,\cdots,x_n)$，使

$$Y=h(X_1,\cdots,X_n).$$

证 这是定理17的特例. #

25 命题 设$\{X_i,i\in J\}$为$(\Omega,\mathscr{F})$上一族r.v.，则：

i) Ω上有限实值函数Y为$\sigma(X_i,i\in J)$可测r.v.的充要条件是存在J的至多为可列的子集I及Borel函数f使$Y=f(X_i,i\in I)$; ii)若

$A\in\sigma(X_i,i\in J)$，必有 J 的至多为可列的子集 I 使 $A\in\sigma(X_i,i\in I)$.

证 i) 充分性是显然的. 为证必要性，记

$$\mathscr{C}=\{\bigcap_{j=1}^{n}A_{i_j}:A_{i_j}\in\sigma(X_{i_j}),i_j\in J,1\leqslant j\leqslant n,n\geqslant 1\},$$

则 $\mathscr{C}$ 是一个 π 类，且 $\sigma(\mathscr{C})=\sigma(X_i,i\in J)$. 又令 $\mathscr{L}$ 为有限r.v. 全体.

$\mathscr{H}=\{Z:Z=g(X_i,i\in I),I$ 为 J 的至多为可列的子集，g 为Borel 函数$\}$ 则容易验证 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$ 类，且 $\mathscr{H}\supset\{I_A:A\in\mathscr{C}\}$，故由定理 19，$\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(\mathscr{C})=\sigma(X_i,\ i\in J)$ 可测有限 r.v. 全体. 这就可推出对一切 $\sigma(X_i,i\in J)$ 可测有限 r.v. 为至多可列个 $X_i,i\in J$ 的 Borel 函数. ii) 是 i) 的特例，取 I_A 并运用 i) 即可.

26 命题 若 $(\Omega,\mathscr{F})=(\Omega_1,\mathscr{F}_1)\times(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 为乘积可测空间，f 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\overline{R},\mathscr{B}_{\overline{R}})$ 的可测函数，则对每个 $\omega_1^0\in\Omega_1$，$g(\omega_2)=f(\omega_1^0,\omega_2)$ 是 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 到 $(\overline{R},\mathscr{B}_{\overline{R}})$ 的可测函数.

证 记 $\mathscr{C}=\{A_1\times A_2:A_1\in\mathscr{F}_1,A_2\in\mathscr{F}_2\}$，则 $\mathscr{C}$ 是 π 类且 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$. 又令 $\mathscr{L}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r.v. 全体.

$$\mathscr{H}=\{h(\omega_1,\omega_2):\text{对每个 }\omega_1\in\Omega,h(\omega_1,\cdot)\in\mathscr{F}_2\},$$

则容易验证 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$ 类，且 $\mathscr{H}\supset\{I_A:A\in\mathscr{C}\}$ 故由定理19，$\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{F}$ 可测 r.v. 全体. #

小　　结

本章可以说是没有概率的概率论. 它主要介绍可测空间中不依赖于概率的各种性质. §1 从介绍集合的运算开始引进了 σ 域的概念. σ 域是以后规定概率的基础. 命题 1.17 说明从我们感兴趣的集类 $\mathscr{C}$ 出发总可张成一个 σ 域，但那里并没有具体给出 $\sigma(\mathscr{C})$ 是如何构成的。事实上可以是由 $\mathscr{C}\to\mathscr{S}(\mathscr{C})$($\mathscr{C}$ 生成的半域，习题10)$\to\mathscr{A}(\mathscr{C})$(命题 1.14)$\to\sigma(\mathscr{C})$ 这一过程来完成. 这一过程也是以后测度生成和扩张的阶梯. 由于 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$ 到 $\sigma(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{S}(\mathscr{C})\to\sigma(\mathscr{C})$ 的扩张过程不是构造性的，§2 的两种单调类定理(定理 2.5 和 2.9) 就是一个重要的工具，它成为概率

论中把域或半域(π类)上的某些性质推到σ域上的一种最常用的手段. §1最后介绍的数直线上Borel σ域是一种最重要的具体情况. §3介绍的可测空间是§1的继续. 在本节还开始用集合运算和σ域的概念来规定事件运算和事件域的概念. §3后一半介绍了乘积可测空间的概念. 它可看为§1结果的应用, 但其本身在测度论中也是十分重要的. §4介绍了随机变量的概念和性质. 可测映照是较随机变量更一般的概念, 一维和多维随机变量都是一种特殊的可测映照. 命题4.14是描写r.v.构造的一个命题, 也是我们以后建立积分的出发点. 函数形式的单调类定理4.19是以后建立涉及可测函数某些性质的一种重要手段, 初学时并不容易掌握它的用法, 但只需在以后用到这一定理时, 能对使用或不使用单调类定理两种方法进行比较, 就会容易地掌握这一单调类定理的用法.

习　题

1. 若Ω为实直线, $A_n=(-\infty,a_n)$, $n\geq 1$, 试问$\limsup\limits_n A_n$和$\liminf\limits_n A_n$是什么集合.

2. 若$\{A_n, n\geq 1\}$为互不相交集合的序列, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{j=n}^{\infty} A_j=\phi$.

3. 证明: $(\varliminf\limits_n A_n)^c=\varlimsup\limits_n A_n^c$;

$$\varlimsup_n (A_n\cup B_n)=\varlimsup_n A_n\cup\varlimsup_n B_n,\qquad \varliminf_n (A_nB_n)=\varliminf_n A_n\varliminf_n B_n;$$

$$\varliminf_n A_n\varlimsup_n B_n\subset\varlimsup_n (A_nB_n)\subset\varlimsup_n A_n\varlimsup_n B_n.$$

4. 若$A\cup N_1=B\cup N_2$, 证明$A\triangle B\subset N_1\cup N_2$.

5. 证明: $A\triangle B=A^c\triangle B^c$　　$C=A\triangle B\Leftrightarrow A=B\triangle C$,

$$(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_n B_n)\subset\bigcup_n(A_n\triangle B_n),\quad (\bigcap_n A_n)\triangle(\bigcap_n B_n)\subset\bigcup_n(A_n\triangle B_n).$$

6. 对任何集合序列$\{A_n, n\geq 1\}$, 令$B_1=A_1$, $B_{n+1}=B_n\triangle A_{n+1}$, $n\geq 1$. 证明$\lim\limits_n B_n$存在当且仅当$\lim\limits_n A_n=\varnothing$.

7. 证明f为集合示性函数的充要条件是$f^2=f$.

8. 若$\{F_{ij}, j\in J_i, i\in I\}$为集合族, 证明

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i}F_{ij}=\bigcup_{\{j_i\}\in K}\bigcap_{i\in I}F_{ij_i},$$

其中$K=\mathop{\times}\limits_{i\in I}J_i$表示所有序列$\{j_i, i\in I\}$的集合.

9. 若 $\mathscr{C}\subset P(\Omega)$，$\mathscr{C}_s$，$\mathscr{C}_d$，$\mathscr{C}_\sigma$，$\mathscr{C}_\delta$ 分别表示由 $\mathscr{C}$ 中集合有限并、有限交、可列并、可列交构成的集类，试证 $\mathscr{C}_{sd}=(\mathscr{C}_s)_d$，$\mathscr{C}_{s\delta}$，对有限并（有限交）封闭，因而 $\mathscr{C}_{sd}=\mathscr{C}_{ds}$，同时它也为包含 $\mathscr{C}$ 且对有限并有限交封闭的最小集类。举例说明 $\mathscr{C}_{\sigma d}$，$\mathscr{C}_{\sigma\delta}$（$\mathscr{C}_{\delta s}$，$\mathscr{C}_{\delta\sigma}$）对可列并（可列交）运算不一定封闭.

10. 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$. 取 $\mathscr{C}_1=\{\phi,\Omega,A: A$ 或 $A^c\in\mathscr{C}\}$，$\mathscr{C}_2=\{\bigcap_{i=1}^{n}A_i:A_i\in\mathscr{C}_1, n\geq 1\}$. 试证 $\mathscr{C}_2$ 为由 $\mathscr{C}$ 生成的半域 $\mathscr{S}(\mathscr{C})$.

11. 若 $\mathscr{C}$ 是由 Ω 中有限个子集构成的集类，则 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$ 只含有限个集合，且这时必可将 Ω 分解为有限个互不相交的 $\{A_n,n\geq 1\}$ 之并，而 $\mathscr{A}(\mathscr{C})=\sigma(A_n,n\geq 1)$.

12. 若 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，$\mathscr{C}$ 由可列个集构成，则 $\mathscr{A}(\mathscr{C})$ 也由可列个集构成.

13. 若 $\{\mathscr{F}_j,j\geq 1\}$ 为 Ω 上的递增 σ 域，即 $\mathscr{F}_j\subset\mathscr{F}_{j+1}$，则 $\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j$ 是一个域，但不一定是 σ 域.

14. σ 域 $\mathscr{F}$ 称为可列生成的，若存在 $\{A_n,n\geq 1\}$ 使 $\mathscr{F}=\sigma(A_n,n\geq 1)$. 证明：若每个 $\mathscr{F}_j$ 都是可列生成的，则 $\bigvee_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j\triangleq\sigma(\mathscr{F}_j,j\geq 1)$ 也是可列生成的.

15. 设 $\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda_n$，$\{\Lambda_n,n\geq 1\}$ 互不相交，证明

$$\sigma(\Lambda_n,n\geq 1)=\{\sum_{j\geq 1}\Lambda_{n_j}:\{\Lambda_{n_j}\}为\{\Lambda_n\}的子列\},$$

并说明可列生成 σ 域未必能找到 Ω 的可列分割 $\Omega=\sum_{n\geq 1}\Lambda_n$，使 $\mathscr{F}=\sigma(\Lambda_n,n\geq 1)$.

16. 若 $\mathscr{F}$ 为 σ 域，$E\notin\mathscr{F}$，证明 $\sigma(\mathscr{F},E)=\{AE+BE^c:A,B\in\mathscr{F}\}$.

17. $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间. 若对每个 $A\in\mathscr{F}$，$I_A(\omega)=I_A(\omega')$，则称 $\omega\sim\omega'$，证明这是元素间的一个等价关系。若规定每个等价类称为 $\mathscr{F}$ 的一个原子，试证当 $\mathscr{F}$ 为可列生成时，原子必为可测的.

18. 若 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{F}_\alpha,\alpha\in I)$，则对任一个 $A\in\mathscr{F}$，必存在至多为可列的指标集 $\{\alpha_j,j\geq 1\}\subset I$ 使 $A\in\sigma(E_{\alpha_j},j\geq 1)$.

19. 若 E 为距离空间，$\mathscr{C}$ 为E 中开集全体，证明 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{A}(\mathscr{C})$.

20. $\Omega=\{0,1,2,3\}$，$\mathscr{C}=\{\phi,\Omega,\{0,1\},\{2,3\},\{0,3\},\{1,2\}\}$. 验证 $\mathscr{C}$ 为 λ 类，但不是 π 类.

21. $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{P}(\Omega)$ 的非空子集，证明 $\mathscr{G}$ 为 λ 类的充要条件是它满足 i) $\Omega\in\mathscr{G}$，ii) 若 $A,B\in\mathscr{G}$，$A\subset B$，则 $B-A\in\mathscr{G}$，

iii) 若 $\{A_n, n\geq 1\}\subset\mathscr{G}$，且 $A_n\subset A_{n+1}$，则 $\bigcup_n A_n\in\mathscr{G}$.

22. Ω 到 Ω' 的映照称为单射的（injective）若当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时，$X(\omega_1)\neq X(\omega_2)$；称为满射的（surjective）若 $X(\Omega)=\Omega'$；称为双射的（bijective）若它既是单射又是满射的. 并由 $X(A)=\{X(\omega):\omega\in A\}$ 规定 $\mathscr{P}(\Omega)$ 到 $\mathscr{P}(\Omega')$ 的映照. 证明：

    i) $X(\bigcup_{i\in I} A_i)=\bigcup_{i\in I} X(A_i)$；

    ii) 对任一集族 $\{A_i, i\in I\}$，$X(\bigcap_{i\in I} A_i)=\bigcap_{i\in I} X(A_i)$ 的充要条件是 X 为单射的；

    iii) 对每个 A，$X(X^{-1}(A))=A$ 的充要条件是 X 为满射的；

    iv) 对每个 A $[X(A)]^c=X(A^c)$ 的充要条件是 X 为双射的.

23. 若 $(\Omega,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{B}$ 表示 Ω 的 Borel σ 域. 若 $\mathscr{B}_0=\sigma(f: f$ 为 $(\Omega,\mathscr{T})$ 上连续函数)，则 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}$. 若 $(\Omega,\mathscr{T})$ 为可距离化的，则 $\mathscr{B}_0=\mathscr{B}$（$\mathscr{B}_0$ 一般称为 Baire σ 域）.

24. 若 $(\Omega_i,\mathscr{F}_i)$，$i\in I$ 为一族可测空间，又对每个 $i\in I$，X_i 是 Ω 到 Ω_i 的如下映照：

$$X_i: \Omega\ni\omega=(\omega_i,\ i\in I)\to\omega_i\in\Omega_i$$

证明乘积 σ 域 $\underset{i\in I}{\mathbf{X}}\mathscr{F}_i$ 是使每 X_i 都可测的最小 σ 域.

25. 若 $h(x,y)$ 是 $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照，又 $f(u,v)$ 是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$ 上的可测映照，$g(u,v)$ 是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$ 上的可测映照. 证明 $X(u,v)=h(f(u,v),g(u,v))$ 是 $(U_1\times U_2,\mathscr{G}_1\times\mathscr{G}_2)$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照.

26. 若 f 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{E})$ 的可测映照，D 为完备可分距离空间，$\mathscr{D}$ 为 D 上的 Borel 域，则 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 D 值函数 g 为 $\sigma(f)$ 可测的充要条件是存在 $h\in\mathscr{E}/\mathscr{D}$ 使 $g=h\circ f$.

27. 验证下列函数集 $\mathscr{H}$ 是否为 R 或 $[0,1]$ 的某个 σ 域的有界可测函数全体：

    i) $\mathscr{H}=\{R^1$ 上支集有界的有界函数全体$\}$；

    ii) $\mathscr{H}=\{I_A, A\in\mathscr{B}, \mathscr{B}$ 表 Borel σ 域$\}$；

    iii) $\mathscr{H}=\{[0,1]$ 上线性函数全体$\}$；

    iv) $\mathscr{H}=\{$Borel 可测有界阶梯函数全体$\}$.

28. $\mathscr{H}$ 是 Ω 上某些有界实函数集合. 设

    i) $1\in\mathscr{H}$，

    ii) $\mathscr{H}$ 是线性空间且为代数（即当 $f,g\in\mathscr{H}$ 必有 $fg\in\mathscr{H}$），

iii) $\mathscr{H}$ 对其中元素单调收敛序列或一致收敛序列的极限运算是封闭的.

试证必有 Ω 上的 σ 域 $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{H}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}_1)$ 上有界可测函数全体.

29. 令 $\mathscr{H}$ 为Ω上有界函数族，对一致有界单调序列和一致收敛序列的极限运算封闭，又 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}$,若 $\mathscr{H}$ 满足下列两个条件之任一个：

i) $\mathscr{H}$ 为线性空间，$1\in\mathscr{H}$, $\mathscr{C}$对乘积封闭；

ii) $\mathscr{C}$ 为一代数，且存在 $\{f_n\}\subset\mathscr{C}$ 使 $\{f_n\}$ 一致收敛于 1，则 $\mathscr{H}$ 包含一切有界 $\sigma(f, f\in\mathscr{C})$ 可测函数.

30. 设 X 为 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上非负 r. v., 证明

$$B=\{(\omega, x): 0\le x\le X(\omega)\}$$

为 $(\Omega\times R, \mathscr{F}\times\mathscr{B})$上可测集.

第二章　测度与积分——概率与期望

§1　测度与测度空间

一、测度空间

1　**定义**　设Ω为一空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，$\mathscr{C}$上实值(可取$\pm\infty$)函数$\mu$称为集函数.

若对每个$A\in\mathscr{C}$，$|\mu(A)|<\infty$，称μ为有限的

若对每个$A\in\mathscr{C}$，存在$\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathscr{C}$，使$A=\bigcup_n A_n$，且对每个$n$，$|\mu(A_n)|<\infty$，则称$\mu$在$\mathscr{C}$上为$\sigma$有限的，简称为$\sigma$有限的.

若对任意$A,B\in\mathscr{C}$，$AB=\varnothing$，且$A+B\in\mathscr{C}$，都有$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$，则称μ为有限可加的.

若对任意$\{A_n, n\geqslant 1\}\subset\mathscr{C}$，$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，且$\sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{C}$，都有$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$，则称$\mu$在$\mathscr{C}$上为$\sigma$可加的或可列可加的.

显然，若μ为σ可加的，且$\varnothing\in\mathscr{C}$，$\mu(\varnothing)=0$，则$\mu$为有限可加的。又若$\mu$为有限可加或$\sigma$可加的，$\varnothing\in\mathscr{C}$，$\mu(\varnothing)\neq\pm\infty$，则$\mu(\varnothing)=0$。

2　**定义**　设Ω为一空间，$\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$，且$\varnothing\in\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$上集函数$\mu$称为**测度或正测度**，若它满足：i) $\mu(\varnothing)=0$；ii) μ为非负的，即对每个$A\in\mathscr{C}$，$\mu(A)\geqslant 0$；iii) μ为可列可加的.

若$\Omega\in\mathscr{C}$，且$\mathscr{C}$上的测度μ满足$\mu(\Omega)=1$，则称μ为**概率测度**。事件A的概率测度值$\mu(A)$称为A的**概率**.

注　这里我们讨论μ在$\overline{R}$取值的情形，一般地可考虑μ在具有加法运算和极限运算的集合上取值的情形. 特别地，若μ为取复值的可列可加集函数，则称为**复测度**.

3　**例**　在$\mathscr{P}(\Omega)$上规定μ如下：当A为有限集时，$\mu(A)=A$包

含元素的个数；当 A 为无限集时，$\mu(A)=+\infty$. 这时 μ 便是 $\mathscr{P}(\Omega)$上的测度. 当 Ω 为有限集时，μ 为有限的；当 Ω 为可列集时，μ 为 σ 有限的.

4 定义 若$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间，μ 为 $\mathscr{F}$ 上的测度，则$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$称为**测度空间**. 当 P 为$\mathscr{F}$上的概率测度时，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为**概率空间**.

二、 半域和域上的测度

5 定义 $\mathscr{C},\mathscr{D}$ 为 Ω 子集构成的集类，$\mathscr{C}\subset\mathscr{D}$，又 μ，ν 分别为$\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ 上的集函数. 若对每个$A\in\mathscr{C}$，$\mu(A)=\nu(A)$，则称 ν 为 μ 在 $\mathscr{D}$ 上的延拓或扩张，μ 为 ν 在 $\mathscr{C}$ 上的限制，并记 $\mu=\nu|_{\mathscr{C}}$.

6 命题 $\mathscr{S}$ 为 Ω 上的半域，μ 为 $\mathscr{S}$ 上的非负可加集函数，则存在 μ 在由 $\mathscr{S}$ 张成的域 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 上的唯一延拓 ν，ν 在 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$亦是非负可加的；且当 μ 为可列可加时，ν 亦可列可加；μ 为概率测度时，ν 亦为概率测度.

证 由命题1.1.14，$\mathscr{A}(\mathscr{S})=\{A=\sum_{i\in I}S_i;\ \{S_i,i\in I\}$为$\mathscr{S}$ 中互不相交有限族$\}$. 对 $A=\sum_{i\in I}S_i\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$，令

$$\nu(A)=\sum_{i\in I}\mu(S_i).$$

我们先证明这样规定 ν 是合理的. 若 $A=\sum_{i\in I}S_i=\sum_{j\in J}T_j$ 都表为 $\mathscr{S}$ 中不相交有限个集之并，则由

$$\nu(A)=\sum_{i\in I}\mu(S_i)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mu(S_iT_j)=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\mu(S_iT_j)=\sum_{j\in J}\mu(T_j)$$

可知 ν 的定义是一意的，而由 ν 的定义可看出 ν 是μ 的延拓.

再证明 ν 的可加性. 若 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$，$A=\sum_{j\in J}A_j$，$J$ 为有限(可列)足标集. 由于 A,A_j 都属于 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$，故可表为

$$A=\sum_{k\in K}S_k,\qquad A_j=\sum_{i\in I_j}T_i^{(j)}$$

其中，K,I_j 为有限足标集，$S_k,T_i^{(j)}\in\mathscr{S}$，所以，

$$S_k=S_kA=S_k(\sum_{j\in J}A_j)=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}S_kT_i^{(j)},$$

$$T_i^{(j)}=T_i^{(j)}A=T_i^{(j)}\sum_{k\in K}S_k=\sum_{k\in K}T_i^{(j)}S_k.$$

利用 μ 在 $\mathscr{S}$ 上的有限(可列)可加性及 K, I_j 为有限集可得

$$\nu(A)=\sum_{k\in K}\mu(S_k)=\sum_{k\in K}\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\mu(S_kT_i^{(j)})$$
$$=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\sum_{k\in K}\mu(S_kT_i^{(j)})=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}\mu(T_i^{(j)})=\sum_{j\in J}\nu(A_j),$$

即 μ 在 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 上为有限(可列)可加的。

最后，若 ν^* 亦为 μ 为 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 上的延拓，当 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$，必有 $A=\sum_{j\in J}S_j, S_j\in\mathscr{S}$，这时，

$$\nu^*(A)=\sum_{j\in J}\nu^*(S_j)=\sum_{j\in J}\mu(S_j)=\nu(A),$$

所以 μ 在 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 的延拓是唯一的。$\ast$

7 命题 若 μ 为域 $\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\Omega)$ 上的非负有限可加集函数，则

i) μ 是单调的，即当 $A\subset B$，必有 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$；

ii) μ 是半可加的：若 $A\subset\bigcup_{m=1}^{n}A_m$，则 $\mu(A)\leqslant\sum_{m=1}^{n}\mu(A_m)$；

iii) 为使 μ 为 σ 可加的，当且仅当对每个递增序列 $\{A_m\}$，只要 $\bigcup_n A_n\in\mathscr{A}$，便有

$$\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu(A_n)=\mu(\bigcup_n A_n)；\tag{7.1}$$

iv) 若 μ 为 σ 可加的，则对每个递减序列 $\{A_n\}$，只要 $\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}$，且存在 n_0，使 $\mu(A_{n_0})<\infty$，便有

$$\lim_{n\to\infty}\downarrow\mu(A_n)=\mu(\bigcap_n A_n)\tag{7.2}$$

反之，若对每个递减序列 $\{A_n\}$，$\bigcap_n A_n=\varnothing$，都有 $\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=0$，则 μ 必是 σ 可加的。

证 i) 若 $A\subset B$，则 $B=A+(B-A)$，$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B-A)\geqslant\mu(A)$。

ii) 若 $A\subset\bigcup_{m=1}^{n}A_m$，由命题 1.1.6，$\bigcup_{m=1}^{n}A_m=\sum_{m=1}^{n}(A_m\setminus\bigcup_{j<m}A_j)$，故由 i)，

$$\mu(A)\leqslant\mu(\bigcup_{m=1}^{n}A_m)=\sum_{m=1}^{n}\mu(A_m\setminus\bigcup_{j<m}A_j)\leqslant\sum_{m=1}^{n}\mu(A_m).$$

iii) $\Rightarrow$ 记 $A=\bigcup_n A_n$，由于 $\{A_n\}$ 是递增的，若令 $A_0=\varnothing$，则有

$$A=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m-A_{m-1}),$$

故 $$\mu(A)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m-A_{m-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\mu(A_m-A_{m-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\sum_{m=1}^{n}(A_m-A_{m-1})\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$$

$\Leftarrow$若$\{B_n,n\geqslant 1\}$为$\mathscr{A}$中互不相交序列，$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\in\mathscr{A}$，则取$A_n=\sum_{m=1}^{n}B_m$，$\{A_n\}$为递增序列，且$\bigcup_n A_n=\sum_n B_n\in\mathscr{A}$，故由(7.1)，

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\mu\left(\bigcup_n A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\mu(B_m)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(B_m).$$

iv) $\Rightarrow$不妨设$\mu(A_1)<\infty$，令$B_n=A_1-A_n$，则$\{B_n\}$为递增的，$\bigcup_n B_n=A_1-\bigcap_n A_n\in\mathscr{A}$，故由 iii)，

$$\mu(A_1)-\mu\left(\bigcap_n A_n\right)=\mu\left(\bigcup_n B_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(B_n)=\mu(A_1)-\lim_n\mu(A_n),$$

即(7.2)成立。

$\Leftarrow$若$\{B_n\}$为$\mathscr{A}$中互不相交序列，$\sum_n B_n\in\mathscr{A}$。取$A_n=\sum_{j\geqslant n}B_j$，则$\{A_n\}$为递减的，且$\bigcap_n A_n=\varnothing$，故由(7.2)，在下式中令$n\to\infty$有

$$\mu\left(\sum_{m=1}^{\infty}B_m\right)=\mu\left(\sum_{m=1}^{n}B_m\right)+\mu\left(\sum_{m=n+1}^{\infty}B_m\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\mu(B_m)+\mu(A_{n+1})=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(B_m).\ \#$$

注 从命题7的证明中不难看出，对环上的非负可加集函数，命题7也同样成立。

8 系 若μ为σ域$\mathscr{F}$上的测度，$\{A_n\}$为$\mathscr{F}$中的序列，则
$$\mu\left(\varliminf_{n\to\infty}A_n\right)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\mu(A_n).\tag{8.1}$$

若对某个n_0，$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}A_n\right)<\infty$，则
$$\mu\left(\varlimsup_{n\to\infty}A_n\right)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\mu(A_n).\tag{8.2}$$

特别，当$\lim_{n\to\infty}A_n$存在时，且对某个n_0，$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty}A_n\right)<\infty$，则
$$\mu\left(\lim_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).\tag{8.3}$$

证 由于 $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ 是 $\mathscr{F}$ 中递增序列，故

$$\mu(\varliminf_{n\to\infty}A_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_K)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_K)$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geqslant n}\mu(A_K)=\varliminf_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

类似地(利用(7.2))证明(8.2)，(8.3)是(8.1)，(8.2)的推论.

注 系 8 对环上测度 μ 也同样成立.

9 命题 若$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$\mathscr{A}\subset\mathscr{P}(\Omega)$为域，$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{A})$，则对每个 $A\in\mathscr{F}$及任一 $\varepsilon>0$，必存在 $B_\varepsilon\in\mathscr{A}$，使 $P(A\triangle\in B_\varepsilon)<\varepsilon$.

证 记

$$\mathscr{C}=\{A:A\in\mathscr{F},且\ \forall\varepsilon>0,\ \exists B_\varepsilon\in\mathscr{A}使P(A\triangle B_\varepsilon)<\varepsilon\}.$$

显然 $\mathscr{C}\supset\mathscr{A}$，且 $\mathscr{C}$ 是一个 σ 域. 因为由 $A^c\triangle B^c=A\triangle B$，可推出当 $A\in\mathscr{C}$时必有 $A^c\in\mathscr{A}$. 若 $\{A_n,n\geqslant1\}\subset\mathscr{C}$，取 $B_n\in\mathscr{A}$ 及 n_0 满足 $P(A_n\triangle B_n)<\varepsilon/2^{n+1}$，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\setminus\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n)<\varepsilon/2$，则由

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\triangle\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\triangle B_n),$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\triangle\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n\triangle B_n)$$
$$+P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\setminus\bigcup_{n=1}^{n_0}B_n\right)<\varepsilon,$$

可推出当 $\{A_n,n\geqslant1\}\subset\mathscr{C}$ 时，必有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{C}$，故 $\mathscr{C}$ 是 σ 域，因此 $\mathscr{C}\supset\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$. ∎

三、完备测度

10 定义 设 μ 为 σ 域 $\mathscr{F}$ 上的测度，$\mathscr{L}=\{A:A\in\mathscr{F},\mu(A)=0\}$，又

$$令\mathscr{N}=\{N:存在A\in\mathscr{L},使N\subset A\},$$

则 $\mathscr{N}$ 中元素称为 μ **可略集**。若 $\mathscr{N}\subset\mathscr{F}$，则称 μ 在 $\mathscr{F}$ 上为**完备的**.

当$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间时，则 $\mathscr{N}$ 中元素简称**可略集**.

由定义可见，完备性的要求与 $\mathscr{F}$ 及测度 μ 都是有关的.

11 定理(完备化扩张) 若$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间，$\mathscr{N}$为μ可略集全体，则

i) $\overline{\mathscr{F}}=\{A\cup N: A\in\mathscr{F}, N\in\mathscr{N}\}$为$\sigma$域，$\overline{\mathscr{F}}\supset\mathscr{F}$；

ii) 在$\overline{\mathscr{F}}$上，令$\overline{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$，则$\overline{\mu}$是$\overline{\mathscr{F}}$上测度，$\overline{\mu}|_{\mathscr{F}}=\mu$，且当$\mu$为概率测度时$\overline{\mu}$亦然；

iii) $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$是完备测度空间，即$\overline{\mu}$在$\overline{\mathscr{F}}$上是完备的.

证 i) $\overline{\mathscr{F}}\supset\mathscr{F}$是明显的. 首先注意可略集的子集必是可略集，对$A\in\mathscr{F}$及可略集$N\subset B\in\mathscr{F}$，由于

$$(A\cup N)^c=A^cN^c=A^cB^c+BA^cN^c\in\overline{\mathscr{F}},$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\cup N_n)=(\bigcup_n A_n)\cup(\bigcup_n N_n)\in\overline{\mathscr{F}},$$

因而$\overline{\mathscr{F}}$是σ域.

ii) 若$A_1\cup N_1=A_2\cup N_2$，则$A_1\triangle A_2\subset N_1\cup N_2$，所以按 ii) 规定$\overline{\mu}$是一意的，$\overline{\mu}$是测度只需直接验证之.

iii) 若A为$\overline{\mu}$可略集，即有$A\subset B\in\overline{\mathscr{F}}$，$\overline{\mu}(B)=0$，由$\overline{\mathscr{F}}$的定义，$B$必可表为$B=B_1\cup N_1$，$N_1$为$\mu$可略集，$B_1\in\mathscr{F}$，$\overline{\mu}(B_1)=\overline{\mu}(B)=0$，故$B_1$亦为$\mu$可略集，因而$B$是$\mu$可略集，$A$也是$\mu$可略集，$A\in\mathscr{N}\subset\overline{\mathscr{F}}$，故$\overline{\mu}$在$\overline{\mathscr{F}}$上是完备的. ∎

12 定义 定理 11 中的$(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{\mu})$称为$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$的完备化扩张.

由定理 11，我们往往可以假定测度空间是完备的，否则只要取其完备化扩张即可. 一般地，若$\mathscr{F}_1$为$\mathscr{F}$的子σ域，$\mathscr{N}$为某些集构成的σ环，μ在$\mathscr{F}_1$上为测度，μ在$\mathscr{N}$上恒为零，则μ可扩张为$\sigma(\mathscr{F}_1,\mathscr{N})$上的测度(参见习题 15).

§2 概率测度的延拓与生成

一、域上测度延拓定理

1 命题 设$\mathscr{A}$为由Ω子集构成的域，P为$\mathscr{A}$上的测度. 又$\{A_n, n\geqslant 1\}$，$\{B_m, m\geqslant 1\}$为$\mathscr{A}$上两个递增序列，若$\bigcup_n A_n\subset\bigcup_m B_m$，则

$$\lim_n P(A_n)\leqslant\lim_m P(B_m). \tag{1.1}$$

进而，若 $\bigcup_n A_n=\bigcup_m B_m$，则

$$\lim_n P(A_n)=\lim_m P(B_m). \tag{1.2}$$

证　对固定的 n，$\{A_nB_m, m\geqslant 1\}$ 为 $\mathscr{A}$ 中递增序列，$\bigcup_m A_nB_m=A_n\in\mathscr{A}$，故由命题 1.7，

$$\lim_{m\to\infty} P(B_m)\geqslant\lim_{m\to\infty} P(A_nB_m)=P(A_n).$$

令 $n\to\infty$，即得(1.1)．而后一结论只需注意 A_n，B_m 的对称地位，用(1.1)即可得 (1.2)．#

2　若 $\mathscr{A}$ 为域，P 为 $\mathscr{A}$ 上概率测度，记

$$\mathscr{A}_\sigma=\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n: A_n\in\mathscr{A}\},$$

则 $\mathscr{A}\subset\mathscr{A}_\sigma$．在 $\mathscr{A}_\sigma$ 上令

$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=1}^{n} A_m).$$

由命题 1 可见，若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n'$，则用 $\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=1}^{n} A_m)$或$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=1}^{n} A_m')$ 规定 $Q(A)$ 有相同的数值，所以 Q 这一定义是完全确定的，且 $Q|_{\mathscr{A}}=P$．

3　**命题**(续上)　上段中的 $\mathscr{A}_\sigma$ 及 Q 有下列性质：

i) 当 $A\in\mathscr{A}_\sigma$ 时，$0\leqslant Q(A)\leqslant 1$；

ii) 若 $A_1, A_2\in\mathscr{A}_\sigma$，则 $A_1\cup A_2$，$A_1A_2\in\mathscr{A}_\sigma$，且 Q 有下列强可加性：

$$Q(A_1\cup A_2)+Q(A_1A_2)=Q(A_1)+Q(A_2); \tag{3.1}$$

iii) Q 有单调性：若 $A_1\subset A_2$，$A_1, A_2\in\mathscr{A}_\sigma$，则 $Q(A_1)\leqslant Q(A_2)$；

iv) 若 $A_n\in\mathscr{A}_\sigma$，$A_n\uparrow A(n\to\infty)$，则$A\in\mathscr{A}_\sigma$ 且 $Q(A)=\lim_n Q(A_n)$．

证　i) 显然．

ii) 若 $\mathscr{A}$ 中递增序列 $\{A_{1n}, n\geqslant 1\}$，$\{A_{2n}, n\geqslant 1\}$ 分别以 A_1, A_2 为极限，则由

$$P(A_{1n}\cup A_{2n})+P(A_{1n}A_{2n})=P(A_{1n})+P(A_{2n}),$$

令 $n\to\infty$，即得 (3.1)．

iii) 可由命题 1 推出．为证 iv)，若 $\mathscr{A}$ 中递增序列 $\{A_{mk}, k\geqslant 1\}$ 以

A_m 为极限，则 $B_k=\bigcap_{m\leqslant k}A_{mk}\in\mathscr{A}$，且 $\{B_k,k\geqslant1\}$ 为递增序列. 对 $m\leqslant k$,

$$A_{mk}\subset B_k\subset A_k,$$

$$P(A_{mk})\leqslant P(B_k)=Q(B_k)\leqslant Q(A_k)$$

先令 $k\to\infty$，有

$$A_m\subset\lim_{k\to\infty}B_k\subset\lim_{k\to\infty}A_k,$$

$$Q(A_m)\leqslant\lim_{k\to\infty}P(B_k)\leqslant\lim_{k\to\infty}Q(A_k)$$

再令 $m\to\infty$，即得

$$\lim_{k\to\infty}B_k=\lim_{m\to\infty}A_m=A,$$

$$\lim_{m\to\infty}Q(A_m)=\lim_{k\to\infty}P(B_k)=Q(A).\#$$

4 命题(续上) 对 $A\in\mathscr{P}(\Omega)$，令

$$P^*(A)=\inf\{Q(B):B\supset A,B\in\mathscr{A}_\sigma\},\tag{4.1}$$

则 i) $P^*|_{\mathscr{A}_\sigma}=Q$，$0\leqslant P^*(A)\leqslant1$，$A\in\mathscr{P}(\Omega)$;

ii) $P^*(A_1\cup A_2)+P^*(A_1\cap A_2)\leqslant P^*(A_1)+P^*(A_2)$, (4.2)

特别地，P^* 是半可加的：$P^*(A_1\cup A_2)\leqslant P^*(A_1)+P^*(A_2)$;

iii) P^* 是单调的：若 $A_1\subset A_2$，则 $P^*(A_1)\leqslant P^*(A_2)$;

iv) 若 $A_n\uparrow A(n\to\infty)$，则 $P^*(A)=\lim_{n\to\infty}P^*(A_n)$. 特别，$P^*$ 为半 σ 可加的：$P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P^*(B_n)$.

上述 P^* 又称为相应于 P 的外测度.

证 i) 显然.

ii) 对任一 $\varepsilon>0$ 及 A_1,A_2，取 $B_1,B_2\in\mathscr{A}_\sigma$，使 $B_i\supset A_i$,

$$Q(B_i)<P^*(A_i)+\varepsilon/2,$$

这时 $B_1\bigcup B_2\supset A_1\bigcup A_2$，且

$$\begin{aligned}P^*(A_1\cup A_2)+P^*(A_1\cap A_2)&\leqslant Q(B_1\cup B_2)+Q(B_1\cap B_2)\\&=Q(B_1)+Q(B_2)<P^*(A_1)+P^*(A_2)+\varepsilon.\end{aligned}$$

iii) 可由 Q 的单调性得出.

iv) 对任一 $\varepsilon>0$ 及 $\{A_n,n\geqslant1\}$，$A_n\uparrow A$，取 $\{B_n,n\geqslant1\}\subset\mathscr{A}_\sigma$ 使 $B_n\supset A_n$，且 $Q(B_n)<P^*(A_n)+\varepsilon/2^n$. 记 $C_n=\bigcup_{m\leqslant n}B_m\in\mathscr{A}_\sigma$，则 C_n

$\supset A_n$, $\{C_n, n\geqslant 1\}$ 是递增的. 我们用归纳法证明:

$$Q(C_n)\leqslant P^*(A_n)+\sum_{m\leqslant n}\frac{\varepsilon}{2^m}. \tag{4.3}$$

对 $n=1$, 上式是成立的. 若上式对 n 成立, 则由

$$A_n\subset C_n\cap B_{n+1}\in\mathscr{A}_\sigma,$$

$$\begin{aligned}Q(C_{n+1})&=Q(C_n\cup B_{n+1})=Q(C_n)+Q(B_{n+1})-Q(C_n\cap B_{n+1})\\&\leqslant P^*(A_n)+\sum_{m\leqslant n}\frac{\varepsilon}{2^m}+P^*(A_{n+1})+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}-P^*(A_n)\\&=P^*(A_{n+1})+\sum_{m\leqslant n+1}\frac{\varepsilon}{2^m},\end{aligned}$$

于是 (4.3) 对一切 n 成立, 令 $n\to\infty$ 并注意到 $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n\in\mathscr{A}_\sigma$, 故有

$$P^*(A)\leqslant Q(\lim_{n\to\infty}C_n)=\lim_{n\to\infty}Q(C_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}P^*(A_n)+\varepsilon$$

由 ε 的任意性及 P^* 的单调性, 知 iv) 成立. $\#$

5 命题(续上) 设

$$\mathscr{D}=\{D:D\in\mathscr{P}(\Omega),\text{且}P^*(D)+P^*(D^c)=1\}, \tag{5.1}$$

则 i) $\mathscr{D}$ 为 σ 域; $\mathscr{D}\supset\sigma(\mathscr{A})$;

ii) 若 $\bar{P}=P^*|_{\mathscr{D}}$, 则 $\bar{P}$ 为 $\mathscr{D}$ 上的完备概率测度且 $\bar{P}|_{\mathscr{A}}=P$.

证 由 $\mathscr{D}$ 的定义容易看出, 若 $D\in\mathscr{D}$, 则 $D^c\in\mathscr{D}$. 又若 D_1, $D_2\in\mathscr{D}$, 则由 (4.2) 知,

$$P^*(D_1\cup D_2)+P^*(D_1\cap D_2)\leqslant P^*(D_1)+P^*(D_2), \tag{5.2}$$

$$P^*(D_1^c\cap D_2^c)+P^*(D_1^c\cup D_2^c)\leqslant P^*(D_1^c)+P^*(D_2^c). \tag{5.3}$$

将 (5.2), (5.3) 相加, 由 P^* 为半可加的及 $D_1, D_2\in\mathscr{D}$, 有

$$\begin{aligned}2&\leqslant P^*(D_1\cup D_2)+P^*((D_1\cup D_2)^c)+P^*(D_1D_2)+P^*((D_1D_2)^c)\\&\leqslant P^*(D_1)+P^*(D_1^c)+P^*(D_2)+P^*(D_2^c)=2,\end{aligned}$$

因而 $$P^*(D_1\cup D_2)+P^*((D_1\cup D_2)^c)=1,$$

且(5.2), (5.3)都是等式, 所以 $D_1\cup D_2\in\mathscr{D}$, 即 $\mathscr{D}$ 是域, 且 P^* 在 $\mathscr{D}$ 上是强可加的.

若 $\{D_n, n\geqslant 1\}$ 为 $\mathscr{D}$ 中的递增序列, 则由命题 4,

$$P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n)=\lim_{n\to\infty}P^*(D_n),$$

$$P^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)^c)\leqslant P^*(D_m^c),(m\geqslant 1),$$

因此，由 P^* 的半可加性，

$$1\leqslant P^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)+P^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)^c)\leqslant \lim_{n\to\infty} P^*(D_n)+\lim_{n\to\infty} P^*(D_n^c)=1.$$

故上式中等号都成立，$\bigcup_n D_n\in\mathscr{D}$，即 $\mathscr{D}$ 是 σ 域，且由 P^* 对递增序列的连续性，据命题 1.7 可知，P^* 在 $\mathscr{D}$ 上为测度.

若 $A\in\mathscr{A}$，则 $P^*(A)=P(A)$，且由 P 在 $\mathscr{A}$ 上为测度，故

$$P^*(A)+P^*(A^c)=P(A)+P(A^c)=1,$$

即 $A\in\mathscr{D}$，故 $\mathscr{D}\supset\mathscr{A}$. $\mathscr{D}$ 又是 σ 域，故 $\mathscr{D}\supset\sigma(\mathscr{A})$ 且

$$\overline{P}|_{\mathscr{A}}=P^*|_{\mathscr{A}}=P.$$

最后，若 $A\subset D\in\mathscr{D}$，且 $\overline{P}(D)=0$，则

$$0\leqslant P^*(A)\leqslant P^*(D)=\overline{P}(D)=0$$

$$1\leqslant P^*(A)+P^*(A^c)=P^*(A^c)\leqslant 1.$$

所以上式中等号成立，$A\in\mathscr{D}$，且 $\overline{P}(A)=P^*(A)=0$，即 $(\Omega,\mathscr{D},\overline{P})$是完备的.#

6 命题(续上) 对每个 $C\in\mathscr{D}$，必有 $E,F\in\sigma(\mathscr{A})$，$E\subset C\subset F$ 且 $\overline{P}(F-E)=0$.

证 按 $P^*(C)$的定义 (4.1)，必存在 $\{B_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{A}_\sigma\subset\sigma(\mathscr{A})$，使 $B_n\supset C$，且

$$\overline{P}(B_n)\geqslant\overline{P}(C)=P^*(C)>Q(B_n)-\frac{1}{n}=\overline{P}(B_n)-\frac{1}{n}.$$

取 $F=\bigcap_n B_n\supset C$，则 $F\in\sigma(\mathscr{A})$，$F\supset C$，且

$$\overline{P}(B_n)\geqslant\overline{P}(F)\geqslant\overline{P}(C)>\overline{P}(B)-\frac{1}{n},$$

令 $n\to\infty$，可得 $\overline{P}(F)=\overline{P}(C)$，且 $\overline{P}(F-C)=0$. 对 $F-C$ 用已证明的结论，必有 $G\in\sigma(\mathscr{A})$，$G\supset F-C$，$\overline{P}(G)=\overline{P}(F-C)=0$. 记 $E=F\setminus G$，则 $E\in\sigma(\mathscr{A})$，$E\subset C$，$\overline{P}(E)=\overline{P}(F)$，故 $\overline{P}(F-E)=0$.#

7 定理

i) 若 P 为域 $\mathscr{A}$ 上的概率测度，则在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上有唯一的延拓 $\overline{P}$，

$\bar{P}$ 亦为概率；

ii) 若 P 为半域 $\mathscr{S}$ 上的概率测度，则在 $\sigma(\mathscr{S})$ 上必有唯一的延拓 $\bar{P}$，$\bar{P}$ 亦为概率；

iii) 若 μ 为域 $\mathscr{A}$（半域 $\mathscr{S}$）上的 σ 有限测度，则在 $\sigma(\mathscr{A})(\sigma(\mathscr{S}))$ 上必有唯一的延拓．

证 i) $\bar{P}$ 的存在性是命题 5 的直接推论．为证唯一性，设 $\hat{P}$ 是 P 在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上的另一延拓，记

$$\mathscr{C}=\{A:A\in\sigma(\mathscr{A}),\bar{P}(A)=\hat{P}(A)\}$$

则 $\mathscr{C}$ 包含 π 类 $\mathscr{A}$，而 $\mathscr{C}$ 本身易证是一个 λ 类，因而 $\mathscr{C}\supset\sigma(\mathscr{A})$，即表示 $\bar{P}$ 和 $\hat{P}$ 在 $\sigma(\mathscr{A})$ 上是一致的．

ii) 由命题 1.6 及 i) 即可推出．

iii) 只需证明半域的情况．由 μ 在 $\mathscr{S}$ 上 σ 有限，必有

$$\{A_n,\ n\geqslant1\}\subset\mathscr{S} \text{ 使 } \Omega=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \text{ 及 } \mu(A_n)<\infty,\ n\geqslant1.$$

对每个 n，记 $\nu_n=\dfrac{1}{\mu(A_n)}\mu$，$\mathscr{S}_n=\{BA_n,B\in\mathscr{S}\}$，则 $\mathscr{S}_n$ 是 A_n 上的半域，ν_n 是 $(A_n,\ \mathscr{S}_n)$ 上的概率测度，由 i)，在 $(A_n,\ \sigma(\mathscr{S}_n))$ 上 ν_n 有唯一延拓 $\bar{\nu}_n$，令

$$\bar{\mu}(A)=\sum_n\mu(A_n)\bar{\nu}(AA_n),\quad A\in\sigma(\mathscr{S})$$

则可直接验证 $\bar{\mu}$ 是 $(\Omega,\ \sigma(\mathscr{S}))$ 上的测度，且 $\bar{\mu}|_{\mathscr{S}}=\mu$．延拓的唯一性亦可类似地证明．#

8 定义 Ω 上集类 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(\Omega)$ 称为具有有限交性质，若对任一 $\{C_n,n\geqslant1\}\subset\mathscr{C}$，由 $\bigcap\limits_{n\geqslant1}C_n=\varnothing$，则必有整数 N 使 $\bigcap\limits_{n\leqslant N}C_n=\varnothing$．

若 Ω 为拓扑空间，$\mathscr{C}$ 取为紧闭子集全体，则它必有有限交性质．

9 命题 若 Ω 上集类 $\mathscr{C}$ 具有限交性质，又

$$\mathscr{C}_f=\{\bigcup_{i=1}^{n}C_i,\ C_i\in\mathscr{C},n\geqslant1\},$$

则 $\mathscr{C}_f$ 亦具有限交性质．

证 在 $\mathscr{C}_f$ 中，取 $D_n=\bigcup\limits_{m=1}^{M_n}C_m^{(n)}$，$C_m^{(n)}\in\mathscr{C}$。若对每个 $p\geqslant1$，$\bigcap\limits_{n\leqslant p}D_n\neq\varnothing$，

欲证 $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing$. 记

$$J = \mathop{\times}_{n=1}^{\infty} \{1, 2, \cdots, M_n\},$$

$$J_p = \{\{m_n, n \geqslant 1\} : \bigcap_{n<p} C_{m_n}^{(n)} \neq \varnothing, \{m_n\} \in J\},$$

则由集合运算的分配律可得,

$$\bigcap_{n<p} D_n = \bigcup_{\{m_n\} \in J_p} \bigcap_{n<p} C_{m_n}^{(n)}$$

因而由 $\bigcap_{n<p} D_n \neq \varnothing$ 可推出 J_p 是非空的. 同时容易看出 J_p 是递减的, 若能证明 $\lim_p \downarrow J_p \neq \varnothing$, 取 $\{m_n^*\} \in \lim_p J_p$, 则因对每个p, $\bigcap_{n<p} C_{m_n^*}^{(n)} \neq \varnothing$. 利用$\mathscr{C}$的有限交性质 $\bigcap_n D_n \supset \bigcap_n C_{m_n^*}^{(n)} \neq \varnothing$, $\mathscr{C}_1$ 的有限交性质也就得证.

为证 $\bigcap_p J_p$ 是非空的, 先考虑 $J_p, p \geqslant 1$ 中点列的第一个坐标的集合 $\{m_1 : m \in J_q, q \geqslant 1\}$. 由于它是$\{1, \cdots, M_1\}$的子集, 是有限集, 因而至少有一个 m_1^* 存在无限个q及 $m^{(q)} \in J_q$ 使 $m_1^* = m_1^{(q)}$. 若已找到 $\{m_i^*, i \leqslant k\}$. 它有无限个 q 及 $m^{(q)} \in J_q$ 使 $m_i^{(q)} = m_i^*$, $i \leqslant k$. 那么我们考虑 $J_p, p \geqslant k+1$, 中点列前 $k+1$ 个坐标的集合

$$\{(m_1, \cdots, m_{k+1}) : m \in J_p, p \geqslant k+1, m_i = m_i^*, 1 \leqslant i \leqslant k\},$$

那么由 m_i^*, $i \leqslant k$ 所具有的性质可知, 含有无限个 q, 使有 $m_{(q)} \in J_q$, $m_i^{(q)} = m_i^*$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 且 $m_{k+1}^{(q)}$ 也取到同一标号, 例如 m_{k+1}^*. 这样我们归纳地得到了 $\{m_n^*\}$, 它属于一切 J_p, $p \geqslant 1$. 因而 $\bigcap_p J_p \ni \{m_n^*\}$, 即 $\bigcap_p J_p$ 是非空的(这一事实用拓扑学中的 Тихонов 定理证明更方便, J 可看作为一个离散拓扑空间的乘积空间. 由于每个因子是紧的, 故 J 也是紧的, J_p 是 J 的递减非空闭子集, 故 $\bigcap_p J_p \neq \varnothing$). #

10 命题 设 $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ 为Ω上的域或半域, $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, 且$\mathscr{C}$具有有限交性质, P 为$\mathscr{A}$上的有限、非负可加集函数,

且

$$P(A) = \sup\{P(C) : C \subset A, C \in \mathscr{C}\}, \tag{10.1}$$

则 P 在 $\mathscr{A}$ 上为 σ 可加的.

证 先证 $\mathscr{A}$ 为域的情况. 由命题1.7, 只要证明对 $\mathscr{A}$ 中的递减序

列 $\{A_n, n\geqslant 1\}$，$\bigcap\limits_n A_n=\varnothing$，必有$\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=0$. 若不然，不妨设 $\infty>P(A_n)\geqslant\varepsilon>0$. 由(10.1)，对每个 $n\geqslant 1$ 可取 $C_n\in\mathscr{C}, C_n\subset A_n$，且 $P(A_n-C_n)<\varepsilon/2^{n+1}$，这时 $\bigcap\limits_{n\leqslant N} C_n\subset\bigcap\limits_{n\leqslant N} A_n$，且

$$P(\bigcap_{n\leqslant N} A_n)-P(\bigcap_{n\leqslant N} C_n)=P(\bigcap_{n\leqslant N} A_n-\bigcap_{n\leqslant N} C_n)$$
$$\leqslant\sum_{n\leqslant N} P(A_n-C_n)<\sum_{n\leqslant N}\varepsilon/2^{n+1},<\varepsilon/2$$

故
$$P(\bigcap_{n\leqslant N} C_n)>P(\bigcap_{n\leqslant N} A_n)-\varepsilon/2\geqslant\varepsilon/2.$$

即对每个 N，$\bigcap\limits_{n\leqslant N} C_n$ 是非空的，由$\mathscr{C}$的有限交性质，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\supset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n\neq\varnothing$，与 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n=\varnothing$ 相矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)=0$，$P$ 在 $\mathscr{A}$ 上 σ 可加.

若$\mathscr{S}$为半域，P 在$\mathscr{S}$上也满足(10.1). 由命题 1.1.14，$A\in\mathscr{A}(\mathscr{S})$ 必可表为 $A=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$，$S_i\in\mathscr{S}$ 且 $\{S_i\}$ 互不相交. 对每个 i，由(10.1)取 $C_i\in\mathscr{C}, C_i\subset S_i$ 且 $P(S_i)-P(C_i)<\varepsilon/n$. 这时$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\subset\sum\limits_{i=1}^{n} S_i=A$，

$$P(A)-P(\sum_{i=1}^{n} C_i)=\sum_{i=1}^{n}(P(S_i)-P(C_i))<\varepsilon.$$

另一方面，$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i\in\mathscr{C}_f$，由命题9，$\mathscr{C}_f$具有限交性质. 因而以$\mathscr{C}_f$代(10.1)中的$\mathscr{C}$时，$P$ 在 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$上也满足(10.1)，所以 P 在 $\mathscr{A}(\mathscr{S})$上 σ 可加，在 $\mathscr{S}$ 自然也 σ 可加. #

二、分布函数与其生成的测度

11 命题 若 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为测度空间，$f$ 为$(\Omega, \mathscr{F})$到可测空间$(E, \mathscr{E})$的可测映照，则由

$$\nu(B)=\mu(f^{-1}(B)), B\in\mathscr{E}, \tag{11.1}$$

规定$(E, \mathscr{E})$上的测度. 特别，当 μ 为概率测度时，ν 也是概率测度.

证 只要注意到互不相交集合的原象也是互不相交的，利用命题1.4.2即可直接验证 ν 为测度. #

12 定义 由(11.1)规定的 ν 称为 f 在$(E, \mathscr{E})$**上的导出测度**. 特别，当$(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$为概率空间时，$\nu$ 又称为 f 在$(E, \mathscr{E})$**的导出分布或分布**.

若$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，X 为有限实随机变量，则

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

称为 X 的分布函数．若 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)$为 n 维有限随机变量，则

$$F(x_1,\cdots,x_n)=P(X_1\leqslant x_1,\cdots,X_n\leqslant x_n)$$

称为 X 的 n 维分布函数．

13 命题 若 $F(x)$为有限实随机变量 X 的分布函数，则

$$\left.\begin{array}{l}\text{i) } F(x) \text{ 是不减的；}\\ \text{ii) } F(x) \text{ 是右连续的；}\\ \text{iii) } \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1.\end{array}\right\}\qquad(13.1)$$

证 i) 若 $x'<x''$，则

$$F(x'')-F(x')=P(x'<X\leqslant x'')\geqslant 0.$$

ii)
$$\lim_{n\to+\infty}F\left(x+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(X\leqslant x+\frac{1}{n}\right)$$
$$=P\left(\bigcap_n\left\{X\in\left]-\infty,x+\frac{1}{n}\right]\right\}\right)$$
$$=P(\{X\in]-\infty,x]\})=F(x).$$

iii)
$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{n\to+\infty}P\{X\in]-\infty,-n]\}$$
$$=P(\bigcap_n\{X\in]-\infty,-n]\})=0$$
$$\lim_{n\to+\infty}F(x)=\lim_{n\to+\infty}P\{X\in]-\infty,n]\}=P(\bigcup_n\{X\in]-\infty,n]\})$$
$$=P(X\in]-\infty,+\infty[)=1.\#$$

14 命题 若随机向量$(X_1,\cdots,X_n)$和$(Y_1,\cdots,Y_n)$有相同的 n 维分布函数，则对 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的任一 Borel 函数 g，$g(X_1,\cdots,X_n)$和 $g(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的分布，即对一切 $\mathbf{R}^m$ 中的 Borel 集 B，有

$$P\{g(X_1,\cdots,X_n)\in B\}=P\{g(Y_1,\cdots,Y_n)\in B\}.$$

证 首先，由命题 1.4.24，$g(X_1,\cdots,X_n)$和 $g(Y_1,\cdots,Y_n)$都是 m 维随机变量．记

$$\mathscr{G}=\{B:B\in\mathscr{B}^n,P\{(X_1,\cdots,X_n)\in B\}=P\{(Y_1\cdots,Y_n)\in B\}\},$$
$$\mathscr{C}=\{D:D=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n}\,]-\infty,x_i],\ x_i\text{ 为实数}\}.$$

由命题的假定 $\mathscr{G}\supset\mathscr{C}$，而 $\mathscr{C}$ 是一个 π 类，亦可直接验证 $\mathscr{G}$ 是一个 λ 类，因而由系 1.2.10，$\mathscr{G}\supset\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}^n$，这样对 $\mathbf{R}^m$ 中任一 Borel 集 A，由 $g^{-1}(A)\in\mathscr{B}^n$ 有

$$
\begin{aligned}
P\{g(X_1,\cdots,X_n)\in A\} &= P\{(X_1,\cdots,X_n)\in g^{-1}(A)\}\\
&= P\{(Y_1,\cdots,Y_n)\in g^{-1}(A)\}\\
&= P\{g(Y_1,\cdots,Y_n)\in A\},
\end{aligned}
$$

即 $g(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $g(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同分布。*

注 从上述命题容易推出，随机变量的分布由它的分布函数唯一确定。

15 定理 若 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上右连续不减有界函数，则在 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上必存在唯一的有限测度 μ，使

$$
\mu(]a,b])=F(b)-F(a),\quad -\infty\leqslant a<b<+\infty \tag{14.1}
$$

证 取

$$
\mathscr{S}=\{]a,b],]a,b[,[a,b[,[a,b]:-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty\}.
$$

当 a,b 为 $\pm\infty$ 时，约定 $\pm\infty$ 总不属于该区间，则可直接验证 $\mathscr{S}$ 是一个半域，且 $\sigma(\mathscr{S})=\mathscr{B}$. 对 $\mathscr{S}$ 中的集合规定 μ 如下：

$$
\begin{aligned}
&\mu(]a,b])=F(b)-F(a), &&\mu(]a,b[)=F(b-)-F(a),\\
&\mu([a,b[)=F(b-)-F(a-), &&\mu([a,b])=F(b)-F(a-),
\end{aligned}
$$

且约定 $F(+\infty)=F((+\infty)-)$，$F(-\infty)=F((-\infty)+)$，则可直接验证 μ 在 $\mathscr{S}$ 上是有限的，且为有限可加的. 又取

$$
\mathscr{C}=\{[\alpha,\beta]:-\infty<\alpha\leqslant\beta<\infty\},
$$

则因 $\mathscr{C}$ 中的集都是 $\mathbf{R}$ 中紧集，故具有有限交性质. 又利用 F 的右连续性，容易说明 (10.1) 对 μ 是成立的. 例如，$A=]a,b]$，当 $F(b)-F(a)=\mu(A)<\infty$ 时，必有 $\alpha>a$，$\beta\leqslant b$，$\beta<\infty$，使

$$
F(a)\leqslant F(\alpha-)<F(a)+\frac{\varepsilon}{2},
$$

$$
F(b)\geqslant F(\beta)>F(b)-\frac{\varepsilon}{2}.
$$

这时 $[\alpha,\beta]\in\mathscr{C}$，$[\alpha,\beta]\subset]a,b]$

$$
\mu([\alpha,\beta])=F(\beta)-F(\alpha-)>F(b)-F(a)-\varepsilon
$$

$$=\mu(]a, b])-\varepsilon,$$

由 ε 的任意性，(10.1) 成立。对其它形式的 A 也可同样证明. 因此由命题 10，μ 在 $\mathscr{S}$ 上是 σ 可加的，再由定理 7 可知 μ 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上存在唯一延拓(仍记为 μ)，由于 μ 在 $\mathscr{S}$ 上有限，故在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上也必有限. *

注：若将 $\mathbf{R}$ 表为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}]n, n+1]$，那么由定理 15 可证明对 $\mathbf{R}$ 上的右连续不减有限函数 F，必在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上存在唯一的 σ 有限测度 μ 满足(14.1).

16 定义 若 F 为 $\mathbf{R}^1$ 上有限右连续不减函数，则由 F 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上生成的 σ 有限完备测度 μ 称为由 F 产生的 Lebesgue-Stieltjes 测度，简称为 L-S 测度. 特别当 $F(t)=t$ (或同样的 $F(t)=t+c$)，由此产生的完备化测度称为 Lebesgue 测度.

注 若规定 n 元函数 $F(t_1, \cdots, t_n)$ 为不减的是指对任意的 $a_i<b_i$，$1\leqslant i\leqslant n$ 有

$$\triangle_{ab}^n F=F(b_1, \cdots, b_n)-\sum_i F(b_1, \cdots, b_{i-1}, a_i, b_{i+1}, \cdots, b_n)$$
$$+\sum_{i<j} F(b_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, b_n)-\cdots+(-1)^n F(a_1, \cdots, a_n)\geqslant 0,$$

则对 n 元有限右连续不减函数也可以唯一地在 $(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 上产生一个 σ 有限完备测度，使

$$\mu(]a_1, b_1]\times\cdots\times]a_n, b_n])=\triangle_{ab}^n F.$$

这个测度也称为 $(\mathbf{R}^n, \mathscr{B}^n)$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 而当

$$F(x_1, \cdots, x_n)=x_1 x_2\cdots x_n$$

时，相应的完备化测度就称为 n 维的 Lebesgue 测度.

17 定理 若 $F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上满足 (13.1) 的函数，则必存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及其上的随机变量 X，使

$$P(X\leqslant x)=F(x).$$

证 取 $\Omega=\mathbf{R}$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}$，P 为由 F 在 $(\mathbf{R}, \mathscr{B})$ 上生成的 L-S 测度，则由

$$F(+\infty)-F(-\infty)=1,$$

可知 P 是一个概率测度，又令

$$X(x)=x, x\in\mathbf{R},$$

则它是一个随机变量，且

$$P(X\leqslant y)=P\{x:x\leqslant y\}=F(y).\#$$

注 定理中所述的概率空间和 X 分别称为标准概率空间和标准随机变量，对 n 元函数，类似的定理也是成立的.

由于这一定理，对概率论中从分布出发讨论的问题都可以认为是从概率空间出发讨论的.

§3 积分-期望

在这一节中，先讨论关于概率测度的积分，我们将在固定的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上进行讨论.

1 **定义** 若 $X(\omega)=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega)$ 为阶梯 r.v.，则称 $\sum_i x_i P(A_i)$ 为 X 的**期望**或 **X 关于 P 的积分**，记为

$$\mathbf{E}(X),\ \mathbf{E}X,\int X(\omega)\,P(d\omega),\int X\,dP\text{ 或}\int X.$$

注 当 $X(\omega)=\sum_i x_i I_{A_i}(\omega)=\sum_j y_j I_{B_j}(\omega)$，且 $\{B_j\}$ 为 $\{A_i\}$ 的细分，则容易看出

$$\mathbf{E}X=\sum_i x_i P(A_i)=\sum_j y_j P(B_j) \qquad (1.1)$$

当 X 为广义实值 r.v.，且只取 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，若约定 $0\cdot(\pm\infty)=0$，则仍可如上规定 $\mathbf{E}X$.

2 **命题** 若 $\mathscr{E}$ 表 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上阶梯 r.v. 全体，则

i) 期望 $\mathbf{E}(\cdot)$ 是唯一满足 $\mathbf{E}(I_A)=P(A)$ 的 $\mathscr{E}$ 上的正线性泛函；

ii) 若 $\{X_n,n\geqslant 1\}\subset\mathscr{E}$，$X_n\uparrow$（或$\downarrow$）$X\in\mathscr{E}$，则

$$\mathbf{E}(X_n)\uparrow(\text{或}\downarrow)\,\mathbf{E}(X);$$

iii) 若 $\mathbf{E}(\cdot)$ 为 $\mathscr{E}$ 上正线性泛函，$\mathbf{E}(1)=1$，且当 $\mathscr{E}$ 中序列 $X_n\downarrow 0$ 时，$\mathbf{E}X_n\downarrow 0$，则由 $Q(A)=\mathbf{E}(I_A)$ 可规定 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度.

证 i) $\mathbf{E}$ 的正线性可直接验证，唯一性由 $\mathbf{E}(I_A)=P(A)$ 及线性性推出.

ii) 先设 $X_n\downarrow 0$. 若记 k 为 X_1 的上确界，则

$$0 \leqslant X_n \leqslant k I_{(X_n > \varepsilon)} + \varepsilon.$$

由 $\mathbf{E}(\cdot)$ 的非负、线性可推出，

$$0 \leqslant \mathbf{E} X_n \leqslant k P(X_n > \varepsilon) + \varepsilon.$$

因为 $X_n \downarrow 0$，故 $\mathbf{E} X_n$ 不增且$(X_n > \varepsilon) \downarrow \varnothing$．由此，上式右端递减趋于 ε，由于 ε 可为任意正数，故 $\mathbf{E} X_n \downarrow 0$．对一般的单调序列，当$n \uparrow \infty$时，有

$$X_n \downarrow X \in \mathscr{E} \to (X_n - X \in \mathscr{E}, X_n - X \downarrow 0) \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}(X_n - X) \downarrow 0 \Rightarrow \mathbf{E} X_n \downarrow \mathbf{E} X,$$

$$X_n \uparrow X \in \mathscr{E} \to -X_n \downarrow -X \in \mathscr{E} \Rightarrow \mathbf{E}(-X_n) \downarrow \mathbf{E}(-X) \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} X_n \uparrow \mathbf{E} X.$$

iii) 直接验证 $Q(\cdot)$ 是概率测度．#

3 命题 若 $\mathscr{E}_+$ 表非负阶梯 r.v. 全体，$\{X_n, n \geqslant 1\}$，$\{Y_n, n \geqslant 1\}$都是 $\mathscr{E}_+$ 中递增序列，且 $\lim\limits_n X_n \leqslant \lim\limits_n Y_n$，则

$$\lim_n \mathbf{E} X_n \leqslant \lim_n \mathbf{E} Y_n. \tag{3.1}$$

特别，若 $\lim\limits_n X_n = \lim\limits_n Y_n$，则

$$\lim_n \mathbf{E} X_n = \lim_n \mathbf{E} Y_n.$$

证　固定 m，则 $X_m \wedge Y_n \in \mathscr{E}_+$，$\{X_m \wedge Y_n\ n \geqslant 1\}$递增，且

$$\lim_n (X_m \wedge Y_n) = X_m \in \mathscr{E}_+,$$

由命题 2 可得

$$\lim_n \mathbf{E}(Y_n) \geqslant \lim_n \mathbf{E}(X_m \wedge Y_n) = \mathbf{E}(X_m).$$

再令 $m \uparrow \infty$，即得(3.1)．命题后一部分利用 X_n，Y_n 地位对称性即得．#

4 命题(续上)　记

$$\mathscr{G}_+ = \{X = \lim_n \uparrow X_n : X_n \in \mathscr{E}_+\}.$$

对$X \in \mathscr{G}_+$，若 $X = \lim\limits_n \uparrow X_n$，$X_n \in \mathscr{E}_+$，令

$$\mathbf{E} X = \lim_n \uparrow \mathbf{E} X_n. \tag{4.1}$$

则 i) $\mathscr{G}_+$ 为 $(\Omega, \mathscr{F})$上非负 r.v. 全体；

ii) 由(4.1)规定的 $\mathbf{E}(\cdot)$ 是完全确定的；

iii) $0 \leqslant \mathbf{E} X \leqslant \infty (X \in \mathscr{G}_+)$；

iv) 若 $X\in\mathscr{G}_+$, $c\geqslant 0$, 则 $cX\in\mathscr{G}_+$ 且 $\mathsf{E}(cX)=c\mathsf{E}X$;

v) 若 $X_1, X_2\in\mathscr{G}_+$, 则 $X_1+X_2, X_1\vee X_2, X_1\wedge X_2\in\mathscr{G}_+$, 且

$$\mathsf{E}(X_1+X_2)=\mathsf{E}X_1+\mathsf{E}X_2=\mathsf{E}(X_1\vee X_2)+\mathsf{E}(X_1\wedge X_2);$$

vi) 在 $\mathscr{G}_+$ 中若 $X_1\leqslant X_2$, 则 $\mathsf{E}X_1\leqslant\mathsf{E}X_2$;

vii) $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 $\mathscr{G}_+$ 中递增序列, 则 $\lim\limits_n X_n=X\in\mathscr{G}_+$ 且

$$\mathsf{E}\lim_n\uparrow X_n=\lim_n\uparrow\mathsf{E}X_n.$$

证 i) 是命题 1. 4. 14 的结论.

ii) vi) 是命题 3 的结论.

iii) 是明显的.

iv) v) 若 $X_{1n}\uparrow X_1$, $X_{2n}\uparrow X_2$, 则

$$cX_{1n}\uparrow cX_1,\ c\geqslant 0,\qquad X_{1n}+X_{2n}\uparrow X_1+X_2,$$
$$X_{1n}\vee X_{2n}\uparrow X_1\vee X_2,\quad X_{1n}\wedge X_{2n}\uparrow X_1\wedge X_2,$$

而对 I_A, I_B, 由于 (1.1),

$$\mathsf{E}(I_A+I_B)=\mathsf{E}I_A+\mathsf{E}I_B=P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(AB)$$
$$=\mathsf{E}(I_A\vee I_B)+\mathsf{E}(I_A\wedge I_B),$$

再利用 E 在 $\mathscr{E}$ 上的线性性及 $\mathscr{G}_+$ 上 $\mathsf{E}(\cdot)$ 的定义, 即可推出 iv) 和 v).

vii) 若对每个 m, 当 $n\uparrow\infty$ 时, $Y_{mn}\uparrow X_m$, $Y_{mn}\in\mathscr{E}_+$, 令

$$Z_n=\sup_{m\leqslant n}Y_{mn},$$

则 $Z_n\in\mathscr{E}_+$, $\{Z_n, n\geqslant 1\}$ 为递增的, 且

$$Y_{mn}\leqslant Z_n\leqslant X_n,\ (m\leqslant n),\tag{4.2}$$

故

$$\mathsf{E}Y_{mn}\leqslant\mathsf{E}Z_n\leqslant\mathsf{E}X_n\ (m\leqslant n).\tag{4.3}$$

类似于命题 2.3 的证明, 对 (4.2), (4.3), 先令 $n\uparrow\infty$, 再令 $m\uparrow\infty$, 立即得

$$\lim_n\uparrow X_n=\lim_n\uparrow Z_n\in\mathscr{G}_+,$$

且

$$\lim_n\uparrow\mathsf{E}X_n=\lim_n\mathsf{E}Z_n=\mathsf{E}(\lim_n Z_n)=\mathsf{E}(\lim_n X_n).\#$$

5 定义 广义实值 r. v. X, 若 $\mathsf{E}(X^+)<\infty$, $\mathsf{E}(X^-)<\infty$, 则称 X 为

可积的，且以$\mathbf{E}X=\mathbf{E}X^+-\mathbf{E}X^-$表示$X$关于$P$的积分，也称**期望**或**数学期望**，记为$\int X\,dP$等.

较为一般地，若$\mathbf{E}X^+$，$\mathbf{E}X^-$中至少有一个取有限值，则称X为**准可积的**，用$\mathbf{E}X\doteq\mathbf{E}(X^+)-\mathbf{E}(X^-)$表示$X$关于$P$的积分或期望.

有界 r.v. 或阶梯 r.v. 都是可积的，非负 r.v. 是准可积的.

6 命题 若$\mathbf{E}(\cdot)$表示概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上准可积 r.v. 的期望，则 i) $\mathbf{E}X\in\overline{R}$，$\mathbf{E}X\in\mathbf{R}$的充要条件是$X^+$，$X^-$都可积，且这时必有

$$P(X=\pm\infty)=0; \tag{6.1}$$

ii) 若$X\geqslant0$（或更一般地$P(X<0)=0$），则$\mathbf{E}X\geqslant0$，且这时$\mathbf{E}X=0$的充要条件是$P(X=0)=1$；

iii) 对每个$c\in\mathbf{R}$，$\mathbf{E}(cX)=c\mathbf{E}X$. 又若$X+Y$有确定含义，且$X^-$，$Y^-$（或$X^+$，$Y^+$）可积，则

$$\mathbf{E}(X+Y)=\mathbf{E}X+\mathbf{E}Y. \tag{6.2}$$

特别地，当X，Y中至少有一个为可积时，(6.2)必成立；

iv) 若$X\leqslant Y$，则$\mathbf{E}X\leqslant\mathbf{E}Y$.

证 i) 由期望的定义可得$\mathbf{E}X\in\mathbf{R}$的充要条件，且因

$$P(X=+\infty)\leqslant P(X\geqslant n)\leqslant\mathbf{E}\left(\frac{X}{n}I_{(X\geqslant n)}\right)\leqslant\frac{1}{n}\mathbf{E}X^+,$$

由此令$n\to\infty$，可得当$\mathbf{E}X^+<\infty$时，必有$P(X=+\infty)=0$.

ii) 由期望的定义可得$X\geqslant0$时，$\mathbf{E}X\geqslant0$. 又因当$X\geqslant0$时，若$\mathbf{E}X=0$，则

$$P\left(X\geqslant\frac{1}{n}\right)\leqslant n\mathbf{E}XI_{\left(X\geqslant\frac{1}{n}\right)}\leqslant n\mathbf{E}X=0,$$

$$P(X>0)=P\left\{\bigcup_n\left(X\geqslant\frac{1}{n}\right)\right\}\leqslant\sum_n P\left(X\geqslant\frac{1}{n}\right)=0.$$

故对非负X，由$\mathbf{E}X=0$，可推出$P(X=0)=1$.

iii) $\mathbf{E}(cX)=c\mathbf{E}X$由期望定义即可推出. 为证(6.2)，先证若 r.v. $X=X_2-X_1$有确定含义（即不发生$(+\infty)-(+\infty)$的情况），X_1，X_2为非负 r.v.，且至少有一个可积，则

$$\mathsf{E}X=\mathsf{E}X_2-\mathsf{E}X_1. \tag{6.3}$$

由于 $X_2-X_1=X=X^+-X^-$，故

$$X_2+X^-=X_1+X^+,$$

$$\mathsf{E}X_2+\mathsf{E}X^-=\mathsf{E}X_1+\mathsf{E}X^+.$$

若 $\mathsf{E}X_1<\infty$，则 $X^-\leqslant X_1$，$\mathsf{E}X^-<\infty$. 因而由上式可得

$$\mathsf{E}X_2-\mathsf{E}X_1=\mathsf{E}X^+-\mathsf{E}X^-=\mathsf{E}X.$$

同样可对 $\mathsf{E}X_2<\infty$ 的情况证明 (6.3) 是成立的. 由于

$$X+Y=(X^++Y^+)-(X^-+Y^-),$$

且 X^-+Y^- 可积，故由 (6.3) 及命题 4. v) 知，

$$\mathsf{E}(X+Y)=\mathsf{E}(X^++Y^+)-\mathsf{E}(X^-+Y^-)$$
$$=\mathsf{E}X^++\mathsf{E}Y^+-\mathsf{E}X^--\mathsf{E}Y^-=\mathsf{E}X+\mathsf{E}Y.$$

iv) 可由定义直接推出. #

注 在上述命题的证明中我们多次用到下列事实：若 X 为非负 **r. v.**，则

$$P(X\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a}\mathsf{E}(XI_{X\geqslant a})\leqslant\frac{1}{a}\mathsf{E}X \quad (a>0),$$

上述不等式又称为 Марков 不等式. 常用的还有与它相仿的形式：

$$P(|X|>a)\leqslant\frac{1}{a^p}\mathsf{E}|X|^p \quad (a>0,\ p>0), \tag{6.4}$$

$$P(|X|>a)\leqslant\frac{1}{f(a)}\mathsf{E}\{f(|X|)\},$$

其中 f 为 $[0,\infty]$ 上非负不减函数.

7 **命题**(Levi 引理)

i) 若 $X_n\uparrow X$，且对某个 n_0，$X_{n_0}^-$ 可积，则 $\lim\limits_n\uparrow\mathsf{E}X_n=\mathsf{E}X$.

ii) 若 $X_n\downarrow X$，且对某个 n_0，$X_{n_0}^+$ 可积，则 $\lim\limits_n\downarrow\mathsf{E}X_n=\mathsf{E}X$.

证 i) 取 $Y_n=X_n+X_{n_0}^-$，则 $\{Y_n,\ n\geqslant n_0\}$ 非负递增，且

$$\lim_n Y_n=X+X_{n_0}^-.$$

故由命题 4 vii)，

$$\lim_n\mathsf{E}Y_n=\mathsf{E}(X+X_{n_0}^-)=\mathsf{E}X+\mathsf{E}X_{n_0}^-,$$

$$\lim_n \mathsf{E} X_n = \lim_n \mathsf{E} Y_n - \mathsf{E} X^-_{n_0} = \mathsf{E} X.$$

ii) 类似于 i) 考虑 $Y_n = -X_n + X^+_{n_0}$, $n \geqslant n_0$ 即可. #

8 命题(Fatou 引理) 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 r. v. 序列, Y, Z 为可积 r. v. 则 i) 若 $X_n \geqslant Z$, $n \geqslant n_0$, 则

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n) \leqslant \varliminf_n \mathsf{E} X_n \tag{8.1}$$

ii) 若 $X_n \leqslant Y$, $n \geqslant n_0$, 则

$$\mathsf{E}(\varlimsup_n X_n) \geqslant \varlimsup_n \mathsf{E} X_n \tag{8.2}$$

证 i) 取 $Y_n = \inf\limits_{k\geqslant n} X_k \geqslant Z$, 则 $\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 为递增序列, $Y_{n_0} \geqslant Z$, $Y^-_{n_0} \leqslant Z^-$ 可积, 故由 Lévi 引理

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n) = \mathsf{E}(\lim_n Y_n) = \lim_n \mathsf{E} Y_n \leqslant \varliminf_n \mathsf{E} X_n$$

ii) 亦可由同样方法证明. #

9 命题(Lebesgue 控制收敛定理) 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 r. v. 序列 $|X_n| \leqslant Y$, Y 可积, 且 $\lim X_n = X$ 存在, 则

$$\lim_n \mathsf{E} X_n = \mathsf{E} X \tag{9.1}$$

证 注意 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 满足 Fatou 引理条件(取 $Z = -Y$), 故由 Fatou 引理

$$\mathsf{E}(X_n) = \mathsf{E}(\varliminf_n X_n) \leqslant \varliminf_n \mathsf{E} X_n \leqslant$$
$$\leqslant \varlimsup_n \mathsf{E} X_n \leqslant \mathsf{E}(\varlimsup_n X_n) = \mathsf{E}(X_n)$$

由于 $|X_n| \leqslant Y$, 故 $|X| \leqslant Y$, X 可积, 因此 $\lim\limits_n \mathsf{E} X_n$ 存在且 (9.1) 为真. #

10 定义 设 X 为 r. v., $A \in \mathscr{F}$, 若 X 准可积, 则记

$$\int_A X\, dP = \mathsf{E}(X I_A).$$

$\varphi(A) = \int_A X dP$ 看作为 $A \in \mathscr{F}$ 的函数时称为 X 的不定积分.

11 命题 设 X 准可积, $\varphi(A) = \int_A X\, dP$, 则

i) φ 是 $\mathscr{F}$ 上的 σ 可加集函数, 特别当 $X \geqslant 0$ 时, φ 是 $\mathscr{F}$ 上的测度

ii) 若 $P(A)=0$，则 $\varphi(A)=0$.

证 i) 记 $\varphi^+(A)=\int_A X^+dP$，$\varphi^-(A)=\int_A X^-dP$，则因 X 准可积，φ^+，φ^- 中至少一个是有限的，因而我们只对 φ^+ 加以证明. 若 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 为互不相交的可测集序列，记

$$X_n=X^+I_{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i},$$

则 $X_n\geqslant 0$，$X_n\uparrow X^+I_{\sum\limits_{1}^{\infty}A_i}$，故由 Lévi 引理，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^+(A_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i}X^+dP=\lim_{n\to\infty}\int X_n dP$$

$$=\int X^+I_{\sum\limits_{1}^{\infty}A_i}dP=\varphi^+\Big(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\Big),$$

即 φ^+ 是 σ 可加的，同样 φ^- 也是 σ 可加的，故 φ 是 σ 可加的. $\varphi(\varnothing)=0$ 是显然的. 当 $X\geqslant 0$ 时，φ 是非负的，故此时 φ 还是测度.

ii) 设 $P(A)=0$. 若 X 为阶梯 r. v.，$X=\sum\limits_i x_iI_{A_i}$，则

$$\int_A X\,dP=\int\sum_i x_iI_{A_iA}dP=\sum_i x_iP(A_iA)=0.$$

若 X 为非负 r. v.，则有阶梯 r. v. 列 $X_n\uparrow X$，由 $\int_A X_ndP=0$，故 $\int_A X\,dP=0$. 对准可积 r. v.，由

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A X^+\mathrm{d}P-\int_A X^-\mathrm{d}P=0.\#$$

12 上面我们只是对 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 r. v. 讨论了它关于概率测度 P 的积分. 对于 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上有限测度 μ，也完全可以讨论 X 关于 μ 的积分. 事实上取 $\mu_1=\dfrac{1}{\mu(\Omega)}\mu$，它就是一个概率测度，X 关于的 μ 积分可规定为 $\int Xd\mu=\mu(\Omega)\int Xd\mu_1$.

若 μ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上任意测度，则通过阶梯函数规定积分的做法也仍然适用. 我们可先对非负阶梯可测函数 $X=\sum\limits_i x_iI_{A_i}$ 规定其积分为

$$\int X\,dP=\sum_i x_i\,\mu(A_i),$$

这时$\int X\,d\mu$未必是有限的. 对非负可测函数和一般可测函数，亦可用类似的方法来规定可积性与积分. 这时上面提到的积分性质和收敛定理也仍然成立.

13 命题 若$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为测度空间, Y为$(\Omega,\mathscr{F})$到可测空间$(E,\mathscr{E})$的可测映照，μY^{-1}为Y在$(E,\mathscr{E})$上导出测度，又f是$(E,\mathscr{E})$上的可测函数，则下式两端任一端存在必可推出另一端也存在，且有

$$\int_E f(x)\,\mu Y^{-1}(dx)=\int_\Omega f(Y(\omega))\mu(d\omega) \tag{13.1}$$

证 首先由复合映照可测性（命题1.4.8）可知$f(Y(\omega))$为$(\Omega,\mathscr{F})$上可测函数，当$f=I_A$, $A\in\mathscr{E}$时，

$$\begin{aligned}\int_E I_A(x)\mu Y^{-1}(dx)&=\mu Y^{-1}(A)=\mu(Y^{-1}(A))\\&=\int_\Omega I_A(Y(\omega))\,\mu(d\omega)\end{aligned}$$

因而(13.1)对$\mathscr{E}$中集合示性函数是对的，进而对非负阶梯函数也是对的，且只要(13.1)中一端为可积另一端也必可积. 利用单调收敛序列的极限过渡，可知对一切非负$\mathscr{E}$可测函数f(13.1)是对的. 对一般的$\mathscr{E}$可测函数f，由于(13.1)对f^+, f^-是成立的，故只要(13.1)一端对f有意义，另一端也就有意义，且两者相等. #

14 由定理2.15可知，对$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的n维r.v. X，其分布函数$F(x_1,\cdots x_n)$可在$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$上产生一个Lebesgue-Stieltjes测度，也就是X在$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$上的分布. 以后$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$上这一测度就与分布函数用同一符号. $\mathbf{R}^n$上Borel函数f关于它的积分记为

$$\int f\,dF\ \text{或}\ \int f(x)dF(x)$$

等，也称为f关于F的Lebesgue-Stieltjes积分，简称L-S积分.

15 命题 若$f(x)$为有界区间$[a,b]$上的连续函数，F为$[a,b]$上的有限L-S测度，则

$$\int_{]a,b]} f(x)dF(x)=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})], \qquad (15.1)$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, $\xi_i\in[x_{i-1}, x_i]$, $1\leqslant i\leqslant n$. 即此时 L-S 积分与 Riemann-Stieltjes 积分是一致的。

证 若记 $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)I_{]x_{i-1},x_i]}(x)$, 则 $|f_n(x)|\leqslant\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$, 且由 f 的连续性 $\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} f_n(x)=f(x)$, 故由 Lebesgue 控制收敛定理有

$$\int_{]a,b]} f(x)dF(x)=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\int_{]a,b]} f_n(x)dF(x)$$

$$=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[F(x_i)-F(x_{i-1})],$$

即(15.1)成立。#

16 定理 若 X 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上 n 维 r. v., F 为 X 的 n 元分布函数. 又 $g(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元 Borel 函数, $F_{g(x)}$ 表示 $g(X)$的分布函数, 则当 $\mathrm{E}g(X)$ 存在时

$$\mathrm{E}\,g(X)=\int_{\Omega} g(X(\omega))P(d\omega)=\int_{R^1} ydF_{g(x)}(y)$$

$$=\int_{R^n} g(x_1,\cdots,x_n)dF_X(x_1,\cdots,x_n). \qquad (16.1)$$

证 由于 $F_X=PX^{-1}$, $F_{g(X)}=P(g(X))^{-1}$, 所以取可测映照 X 及 $g(X)$ 分别代入(13.1)中的 Y 即得(16.1).

注 这个定理证明了用

$$\int ydF_{g(x)}(y) \text{ 或 } \int g(x)dF_X(x)$$

计算随机变量函数 $g(X)$ 的期望, 所得的值是相等的.

§4 随机变量序列的收敛性与一致可积性

在这一节我们将讨论完备概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量序列

及其关于概率测度的积分，其中许多结果都同样适用于一般测度空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ 上的可测函数及其积分.

一、随机变量的等价类

1 定义 设 $\boldsymbol{D}(\omega)$ 表示与 ω 有关的一个论断. 若 $A=\{\omega: \boldsymbol{D}(\omega)$ 不真$\}$ 为可略集,即 $P(A)=0$, 则称 $\boldsymbol{D}(\omega)$ a.s. 成立或几乎必然成立或 $\boldsymbol{D}(\omega)$ 为真 a.s.; 若 A 为 μ 可略集,即 $\mu(A)=0$, 则称 $\boldsymbol{D}(\omega)$ 为真 a.e. μ.

特别地,对随机变量 X, Y, 若 $P(X\neq Y)=0$, 则记 $X=Y$ a.s..

2 若对随机变量引进记号

$$X \sim Y \quad \text{当且仅当} \quad X=Y \text{ a.s.},$$

由于 $X=X$ a.s.; 由 $X=Y$ a.s. 可推出 $Y=X$ a.s.; 由 $X=Y$ a.s. 和 $Y=Z$ a.s. 可推出 $X=Z$ a.s., 所以"$\sim$"是随机变量间的一个等价关系. 因而我们可以考虑随机变量的等价类. 与 X 等价的元素类记为

$$\tilde{X}=\{X': X'=X \text{ a.s.}\},$$

并任取类内元素作为其代表. 同时可规定等价类间的运算

$$c\tilde{X}=\{cX': X'\sim X\},$$

$$\tilde{X}+\tilde{Y}=\{X'+Y': X'\sim X, Y'\sim Y\},$$

$$\tilde{X}\tilde{Y}=\{X'Y': X'\sim X, Y'\sim Y\},$$

$$\tilde{X}\vee\tilde{Y}=\{X'\vee Y': X'\sim X, Y'\sim Y\},$$

$$\tilde{X}\wedge\tilde{Y}=\{X'\wedge Y': X'\sim X, Y'\sim Y\}.$$

容易看出等价类间的运算与其代表元素间的相应运算是一致的. 同时上述运算还可推广到可列多个等价类之间.

此外, 同一等价类内的随机变量有相同的分布. 对随机变量的期望运算也是不计同类元素的差异的,若 $X\sim X'$, 则两者同时可积或否; 若可积则 $\mathsf{E}X=\mathsf{E}X'$.

在研究概率论中涉及概率的许多问题时, 往往针对某个具体的随机变量, 但所得结论却对与之等价的一类随机变量都成立. 下面我们讨论的许多问题就都是如此. 对只涉及可列个 r.v. 的运算,等价类或

其代表间的运算都是一致的．考虑等价类或其代表并无多大差别，但当涉及到不可列个 r.v. 的运算时，必须十分小心．

3 命题 设 $\{X_i, i\in I\}$ 为一族 r.v.，则必有唯一（不计 a.s. 相等的差别）r.v. Y（可取 $\pm\infty$）满足

i）对每个 $i\in I$，$X_i\leqslant Y$ a.s.；

ii）若 Y' 也满足对每个 $i\in I$，$X_i\leqslant Y'$ a.s.，则

$$Y\leqslant Y' \text{ a.s.}.$$

证 若 I 为可列集，取 $Y=\sup\limits_{i\in I} X_i$ 即可．

一般地，记 $f(x)=\operatorname{arctg} x$，则 f 是严格单调连续有界函数，令

$$\sigma=\sup_{J\subset I}\mathsf{E}\{f(\sup_{i\in J} X_i)\}. \tag{3.1}$$

按上确界定义，必有可列集 $J_n\subset I$ 使

$$\mathsf{E}\{f(\sup_{i\in J_n} X_i)\}>\sigma-\frac{1}{n}.$$

记 $J_0=\bigcup\limits_n J_n$，则 J_0 可列，且对每个 n，有

$$\sigma\geqslant\mathsf{E}\{f(\sup_{i\in J_0} X_i)\}>\sigma-\frac{1}{n},$$

故 $\sigma=\mathsf{E}\{f(\sup\limits_{i\in J_0} X_i)\}$．令 $Y=\sup\limits_{i\in J_0} X_i$，则 Y 为 r.v. 且 i）必成立，否则存在 X_{i_0}，$P(X_{i_0}>Y)>0$，这时 $P(f(X_{i_0}\vee Y)>f(Y))>0$，故

$$\mathsf{E}\{f(\sup_{i\in J_0\cup\{i_0\}} X_i)\}=\mathsf{E}\{f(X_{i_0}\vee Y)\}>\mathsf{E}\{f(Y)\}=\sigma.$$

上式与 (3.1) 矛盾，故 i）成立．此外，若 Y' 也满足

$$X_i\leqslant Y' \text{ a.s.（对每个 } i\in I\text{）},$$

则 $Y=\sup\limits_{i\in J_0} X_i\leqslant Y'$ a.s.，故 ii）成立．唯一性是 ii）的直接结论．#

4 定义 若 $\{X_i, i\in I\}$ 为随机变量族，由命题3规定的 Y 称为 $\{X_i, i\in I\}$ 的本性上确界，记为 $\operatorname*{esssup}\limits_{i\in I} X_i$ 或 $\operatorname*{esup}\limits_{i\in I} X_i$．同样 $\operatorname*{essinf}\limits_{i\in I} X_i\triangleq -\operatorname*{esssup}\limits_{i\in I}(-X_i)$，称为 $\{X_i, i\in I\}$ 的本性下确界．

5 注 命题3表明从等价类来看，任一随机变量族都有上（下）确界，也就是随机变量族作为格是完备的（有上（下）界必有上（下）确界）．从命题3

的证明还可看出，若随机变量族$\{X_i,i\in I\}$本身是一个格，当$i,i'\in I$时，$X_i\vee X_{i'}\in\{X_i,\ i\in I\}$，则必存在一列$\{X_{i_n},i_n\in I\}$，使$\{X i_n\}$递增地收敛于$\operatorname{esssup}\limits_{i\in I}X_i$. 若$\{X_i,\ i\in I\}$对可列个 r. v. 上确界运算是封闭的，则$\operatorname{esssup}\limits_{i\in I}X_i$必属于$\{X_i,i\in I\}$.

命题3的集合形式为对任一可测集族$\{A_i,i\in I\}$，必存在唯一(不计可略集的差别) $A\in\mathscr{F}$，使对每个i，$A_i\dot{\subset}A$ (指$A_i\setminus A$为可略集)，且若$B\in\mathscr{F}$亦有对每个i，$A_i\dot{\subset}B$，则$A\dot{\subset}B$.

例 设$\Omega=[0,1]$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}_{[0,1]}$为$[0,1]$上Borel点集全体，$P$取为$[0,1]$上的 Lebesgue 测度，对$r\in[0,1]$，令

$$X_r(\omega)=\begin{cases}1, & \omega=r\\ 0, & \omega\neq r\end{cases}$$

则$\sup\limits_{r\in[0,1]}X_r(\omega)=1$，但$\operatorname{esssup}\limits_{r\in[0,1]}X_r(\omega)=0$.

6 **定义** 随机变量序列$\{X_n(\omega),n\geqslant 1\}$，若

$$\limsup_n X_n=\liminf_n X_n,\ \text{a. s.},$$

则称$\{X_n,n\geqslant 1\}$为以概率1收敛或 a. s. 收敛，不计等价类内的差别唯一确定的极限$\limsup\limits_n X_n$也记为$\lim\limits_n X_n$.

7 **命题** i) r. v. 序列$\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于有限 r. v. X 的充要条件是对每个$\varepsilon>0$

$$P\Big(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n\geqslant N}\{|X_n-X|>\varepsilon\}\Big)=0; \tag{7.1}$$

ii) r. v. 序列$\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于有限 r. v. 的充要条件是它为 a. s. 收敛意义下的 Cauchy 序列，即当$m,n\to\infty$，$\{X_n-X_m,\ m,n\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于零，或等价地，对每个$\varepsilon>0$，

$$P\Big(\bigcap_{N=1}^{n}\bigcup_{m,n\geqslant N}\{|X_m-X_n|>\varepsilon\}\Big)=0; \tag{7.2}$$

iii) 若正数列$\{\varepsilon_n\}$使$\sum\limits_n\varepsilon_n<\infty$，r. v. 序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_{n+1}-X_n|>\varepsilon_n)<\infty,$$

则 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于有限 r. v.

证 i) 记 $A_n(\varepsilon)=\{\omega: |X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\}$.

$\Rightarrow$ 若 $\omega_0\in\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)=X(\omega)$ 有限$\}$, 则对任一 $\varepsilon>0$, 存在 $N(\varepsilon,\omega_0)$, 当 $n>N(\varepsilon,\omega_0)$时, $|X_n(\omega_0)-X(\omega_0)|\leqslant\varepsilon$, 即 $\omega_0\notin\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n(\varepsilon)$. 所以

$$\{\lim_{n\to\infty}X_n=X\text{ 有限}\}\subset(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n(\varepsilon))^c,$$

由此 (7.1) 成立.

$\Leftarrow$若 (7.1) 对任一 $\varepsilon>0$ 成立, 则

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\lim_{n}}A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)\right\}=0, \tag{7.3}$$

因而对 $\omega_0\notin\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)$及任一 $\varepsilon_0>0$, 取$\frac{1}{k}<\varepsilon_0$, 由

$$\omega_0\in\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)^c=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)^c,$$

必存在 $N(\varepsilon_0,\omega_0)$, 使当 $n>N(\varepsilon_0,\omega_0)$ 时, $\omega_0\in\left(A_n\left(\frac{1}{k}\right)\right)^c$, 即

$$|X_n(\omega_0)-X(\omega_0)|\leqslant\varepsilon_0.$$

由于 ε_0 可为任一正数, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega_0)=X(\omega_0)$. 由(7.3) 故$\{X_n\}$ a. s. 收敛于 X.

ii) 由实数列收敛的 Cauchy 准则, 对固定的 ω_0,

$\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega_0)$ 存在有限 $\Longleftrightarrow\lim\limits_{m,n\to\infty}(X_n(\omega_0)-X_m(\omega_0))=0$.

而 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ a. s. 为 Cauchy 基本列与 (7.2) 等价可与 i) 类似地进行证明.

iii) 记 $A_n=\{|X_{n+1}-X_n|>\varepsilon_n\}$, 则

$$P(\bigcup_{k\geqslant n}A_k)\leqslant\sum_{k\geqslant n}P\{|X_{n+1}-X_n|>\varepsilon_n\}.$$

故 $P(\limsup\limits_{n}A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}P(\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k)=0$, 即 $\limsup\limits_{n}A_n$ 为可略集. 若 $\omega\in(\overline{\lim\limits_{n}}A_n)^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k^c$, 必存在$N_0(\omega)$, 使 $\omega\in\bigcap\limits_{k\geqslant N_0}A_k^c$, 即当$k\geqslant N_0(\omega)$时有,

$$|X_{n+1}(\omega)-X_n(\omega)|\leqslant\varepsilon_n,$$

所以这时 $\sum_n|X_{n+1}(\omega)-X_n(\omega)|<\infty$. 因而当 $\omega\in(\overline{\lim_n} A_n)^c$ 时, $\lim_n X_n(\omega)$ 必存在有限, 故 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于有限 r. v. #

8 定义 随机变量序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$, 若存在有限 r. v. X 使对每一 $\varepsilon>0$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\varepsilon)=0,$$

则称 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 依概率收敛于 X, 记为 $X_n\xrightarrow{P}X$ 或 $\text{pr-}\lim_{n\to\infty} X_n=X$.

容易说明, 依概率收敛极限不计可略集上的差别是唯一确定的. 若 $\text{pr-}\lim_n X_n=X$, $\text{pr-}\lim_n X_n=Y$, 则对任一 $\varepsilon>0$ 有

$$P(|X-Y|\geqslant\varepsilon)\leqslant P\left(|X-X_n|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|X_n-Y|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

故在上式右端令 $n\to\infty$, 有 $P(|X-Y|\geqslant\varepsilon)=0$; 又由于 ε 可取任一正数, 故 $P(X=Y)=1$.

9 引理 若 r. v. 列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为依概率收敛下的 Cauchy 基本列, 即对任一 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{m,n\to\infty} P(|X_n-X_m|>\varepsilon)=0$$

则必有 a. s. 收敛于有限 r. v. 的子序列 $\{X_{n_k}, k\geqslant 1\}$.

证 取 $n_1=1$, 而 $n_j>n_{j-1}$, 且当 $r, s\geqslant n_j$ 时,

$$P(|X_r-X_s|>2^{-j})<3^{-j}.$$

这时 $\sum_j P(|X_{n_{j+1}}-X_{n_j}|>2^{-j})<\sum_j 3^{-j}<\infty$, 由命题 7 $\{X_{n_k}, k\geqslant 1\}$ a. s. 收敛于有限 r. v. #

10 命题 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 r. v. 序列, 则

i) 若 $\lim_{n\to\infty} X_n=X$ a. s., 且 X 为有限 r. v., 则 $\text{pr-}\lim_{n\to\infty} X_n=X$;

ii) $\text{pr-}\lim_{n\to\infty} X_n=X$ 的充要条件是 $\{X_n\}$ 为依概率收敛下的 Cauchy 基本列.

证 i) 若 $\lim_n X_n=X$ a. s., 则由 (7.1) 对每一 $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k\geqslant n}\{|X_k-X|>\varepsilon\}\right)=0$$

因而对每一 $\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P(|X_n-X|>\varepsilon)=0$，即 $\text{pr-}\lim\limits_{n}X_n=X$.

ii) ⇒由于下式，证明是直接的，

$$P(|X_n-X_m|>\varepsilon)\leqslant P\left(|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|X_m-X|>\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

⇐由引理 9，必有子序列 $\{X_{n_k},k\geqslant1\}$ a.s. 收敛于有限 r.v. X，故 $\text{pr-}\lim\limits_{k}X_{n_k}=X$，这时由

$$P(|X_n-X|>\varepsilon)\leqslant P(|X_n-X_{n_k}|>\varepsilon/2)+P(|X_{n_k}-X|>\varepsilon/2).$$

令 $n_k\to\infty$，再令 $n\to\infty$，即得 $\text{pr-}\lim\limits_{n}X_n=X$.#

11 注 对 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上有限 r.v. X,Y，引进

$$\rho(X,Y)=\mathsf{E}\left\{\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right\},$$

则对 r.v. 等价类来说，ρ 是一个距离(见习题)，且按此距离收敛即等价于依概率收敛. 命题 10 表明这一距离空间还是完备的.

二、一致可积性与平均收敛

12 定义 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积 r.v. 族 $\{X_i,i\in I\}$称为一致可积的，若

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{i\in I}\int_{|X_i|>N}|X_i|dP=0.$$

首先指出，若 Y 为可积 r.v.，则

$$\lim_{N\to\infty}\int_{|Y|>N}|Y|dP=0. \tag{12.1}$$

为证上式，只需取 $X_n=|Y|I_{|Y|>n}$，则当 $n\to\infty$ 时，$X_n\to|Y|I_{|Y|=\infty}=0$ a.s. (因 Y 可积)，又 $|X_n|\leqslant|Y|$，故由 Lebesgue 控制收敛定理 (12.1) 成立.

13 命题 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上可积 r.v. 族 $\mathscr{H}=\{X_i,i\in I\}$，

i) 若 I 为有限集，则 $\mathscr{H}$ 一致可积；

ii) 若对每个 $i\in I$，$|X_i|\leqslant Y$，Y 可积，则 $\mathscr{H}$ 一致可积；

iii) 若存在 $p>1$，$\sup\limits_{i}\mathsf{E}|X_i|^p<\infty$，则 $\mathscr{H}$ 一致可积.

证 由(12.1) i)，ii) 是显然的. 为证 iii)利用

$$\int_{|X_i|>N}|X_i|dP\leqslant\frac{1}{N^{p-1}}\int_{|X_i|>N}|X_i|^p dP\leqslant\frac{1}{N^{p-1}}\sup_i \mathsf{E}|X_i|^p. \#$$

14 命题 $(\Omega,\mathscr{F},P)$上可积 r. v. 族$\mathscr{H}=\{X_i,i\in I\}$为一致可积族的充要条件是

i) 一致绝对连续：对任一 $\varepsilon>0$，存在$\eta(\varepsilon)>0$，当 $P(A)<\eta(\varepsilon)$时

$$\sup_{i\in I}\int_A|X_i|dP<\varepsilon,$$

ii) 积分一致有界： $\sup\limits_{i\in I}\mathsf{E}|X_i|<\infty$.

证 $\Rightarrow\int_A|X_i|dP\leqslant\int_{A\cap\{|X_i|\leqslant N\}}|X_i|dP+\int_{A\cap\{|X_i|>N\}}|X_i|dP\leqslant NP(A)+\sup\limits_{i\in I}\int_{|X_i|>N}|X_i|dP.$

先令 $P(A)\to0$ 再令 $N\to\infty$ 得 i)，取 $A=\Omega$ 得 ii)。

$\Leftarrow\quad P(|X_i|>N)\leqslant\frac{1}{N}\sup\limits_i\mathsf{E}|X_i|\to0$，当 $N\to\infty$.

当$P(|X_i|>N)<\eta(\varepsilon)$时由i) $\sup\limits_{i\in I}\int_{|X_i|>N}|X_i|dP<\varepsilon$. #

15 定义 对$(\Omega,\mathscr{F},P)$上可积 r. v. 序列$\{X_n,n\geqslant1\}$，若存在可积 r. v. X 使 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathsf{E}|X_n-X|=0$，则称$\{X_n\}$（一阶）平均收敛或 L^1 收敛于 X，记为 $X_n\xrightarrow{L^1}X$.

16 命题 对可积 r. v. 序列$\{X_n,n\geqslant1\}$，下列条件等价

i) $X_n\xrightarrow{L^1}X$；

ii) $\{X_n\}$ 为 L^1 基本列，即 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\mathsf{E}|X_n-X_m|=0$；

iii) $\{X_n,n\geqslant1\}$ 为一致可积的且 $X_n\xrightarrow{P}X$.

证 i)$\Rightarrow$ ii) $\mathsf{E}|X_n-X_m|\leqslant\mathsf{E}|X_n-X|+\mathsf{E}|X-X_m|\to0(m,n\to\infty)$.

ii)$\Rightarrow$iii) 由 ii)对$\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$，当$m,n\geqslant N(\varepsilon)$时，$\mathsf{E}|X_n-X_m|<\varepsilon$，这时，

$$\sup_n\mathsf{E}|X_n|\leqslant\sup_{n\leqslant N(\varepsilon)}\mathsf{E}|X_n|+\sup_{n>N(\varepsilon)}\mathsf{E}|X_n-X_{N(\varepsilon)}|\leqslant\sup_{n\leqslant N(\varepsilon)}\mathsf{E}|X_n|+\varepsilon<\infty,$$

$$\sup_n \int_A |X_n| dP \leqslant \sup_{n\leqslant N(\varepsilon)} \int_A |X_n| dP + \sup_{n>N(\varepsilon)} \mathsf{E}|X_n - X_{N(\varepsilon)}| \leqslant \sup_{n\leqslant N(\varepsilon)} \int_A |X_n| dP + \varepsilon.$$

对已定的$N(\varepsilon)$可取$P(A)$足够小，使上式右端小于2ε，故由命题14，$\{X_n\}$为一致可积的。另一方面

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \mathsf{E}|X_n - X_m| \to 0,\ m,n\to\infty.$$

即$\{X_n, n\geqslant 1\}$为依概率收敛的基本列，故存在有限 r. v. 使$X_n \xrightarrow{P} X$。

iii)⇒ i) 由引理9必有子序列$X_{n_k}\to X$ a. s.，按 Fatou 引理

$$\int |X| dP = \int \varliminf_k |X_{n_k}| dP \leqslant \varliminf_k \int |X_{n_k}| dP \leqslant \sup_n \mathsf{E}|X_n| < \infty$$

故X为可积的且

$$\int |X_n - X| dP \leqslant \int_{|X_n - X|\leqslant\varepsilon} |X_n - X| dP + \int_{|X_n - X|>\varepsilon} |X| dP + \int_{|X_n - X|>\varepsilon} |X_n| dP$$

$$\leqslant \varepsilon + \int_{|X_n - X|>\varepsilon} |X| dP + \int_{|X_n - X|>\varepsilon} |X_n| dP.$$

由命题14，$\{X_n\}$一致绝对连续，只要$P(|X_n - X|>\varepsilon)$足够小，就能使上式后两项分别小于ε，故在上式中令$n\to\infty$，再令$\varepsilon\to 0$，即可得证。∗

三、L^p 空 间

17 引理（Jensen 不等式）设$f(u,v)$为$\{(u,v): u\geqslant 0,\ v\geqslant 0\}$上二元函数，并有二阶连续偏导数，且

$$A(u,v) = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix}$$

为非负定矩阵，则对任何非负可积 r. v. U, V，成立

$$\mathsf{E}\{f(U,V)\} \leqslant f(\mathsf{E}U, \mathsf{E}V). \tag{17.1}$$

证 利用多元函数的 Taylor 公式，将$f(u,v)$在$(u_0, v_0) = (\mathsf{E}U, \mathsf{E}V)$

展开，可得

$$f(u,v)=f(u_0,v_0)+\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,\ v_0)(u-u_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)(v-v_0)$$

$$-\frac{1}{2}(u-u_0,v-v_0)A(u_0+\theta(u-u_0),v_0+\theta(v-v_0))\begin{pmatrix}u-u_0\\ v-v_0\end{pmatrix}.$$

由于 A 为非负定阵，可得对任何可积 r. v. U,V，有

$$f(U,V)\leqslant f(\mathsf{E}U,\mathsf{E}V)+\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)(U-\mathsf{E}U)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)(V-\mathsf{E}V).$$

对上式取期望即得 (17.1)。#

18 系 设 $\varphi_\alpha(u,v)=u^\alpha v^{1-\alpha}$，$0<\alpha<1$ 及 $\psi_p(u,v)=(u^{\frac{1}{p}}+v^{\frac{1}{p}})^p$，$1\leqslant p<\infty$。又 U,V 为可积 r. v.，则

$$\mathsf{E}[\varphi_\alpha(U,V)]\leqslant\varphi_\alpha(\mathsf{E}U,\mathsf{E}V),\tag{18.1}$$

$$\mathsf{E}[\psi_p(U,\ V)]\leqslant\psi_p(\mathsf{E}U,\mathsf{E}V).\tag{18.2}$$

证 由直接计算可得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial v^2}\end{pmatrix}=-\alpha(1-\alpha)u^\alpha u^{1-\alpha}\begin{pmatrix}\frac{1}{u}\\ -\frac{1}{v}\end{pmatrix}\left(\frac{1}{u},\ -\frac{1}{v}\right),$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\psi_p}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\psi_p}{\partial u\partial v}\\ \frac{\partial^2\psi_p}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\varphi_p}{\partial v^2}\end{pmatrix}=-\frac{p-1}{p}(u^{\frac{1}{p}}+v^{\frac{1}{p}})^{p-2}u^{\frac{1}{p}}v^{\frac{1}{p}}\begin{pmatrix}\frac{1}{v}\\ -\frac{1}{u}\end{pmatrix}\left(\frac{1}{v},\ -\frac{1}{u}\right).$$

所以 ψ_α，ψ_p 都满足引理 17 对 f 的要求。因而由 (17.1) 可得 (18.1)，(18.2) 成立。#

19 定义 对实 r. v. X，记

$$\|X\|_p=(\mathsf{E}|X|^p)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|X\|_\infty=\sup\{x:P(|X|>x)>0\}.$$

20 命题 i) 对 $1<p<q<\infty$，$0\leqslant\|X\|_1\leqslant\|X\|_p\leqslant\|X\|_q\leqslant\|X\|_\infty\leqslant\infty$；

ii) 若 $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ 且 $r^{-1}=p^{-1}+q^{-1}$，则

$$\|XY\|_r \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q. \tag{20.1}$$

特别地，对$1\leqslant p,q\leqslant\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1$有Hölder不等式

$$\mathsf{E}|XY|\leqslant \|X\|_p\|Y\|_q; \tag{20.2}$$

iii) 对$1\leqslant p\leqslant\infty$及实数$c$，有

$$\|cX\|_p=|c|\,\|X\|_p \tag{20.3}$$

及Minkowski不等式

$$\|X+Y\|_p\leqslant\|X\|_p+\|Y\|_p. \tag{20.4}$$

证　先证 ii). 只需考虑$\|X\|_p$, $\|Y\|_q$为有限的情况. 若$q=\infty$，则$|XY|\leqslant|X|\,\|Y\|_\infty$ a.s.，(20.1)可由此推出. $p=\infty$亦可类似处理. 故只考虑p,q为有限的情况. 在(18.1)中，令$\alpha=r/p$，$U=|X|^p$，$V=|Y|^q$，则有$1-\alpha=r/q$，且

$$\mathsf{E}|X|^{p\cdot\frac{r}{p}}|Y|^{q\cdot\frac{r}{q}}\leqslant(\mathsf{E}|X|^p)^{\frac{r}{p}}(\mathsf{E}|Y|^q)^{\frac{r}{q}},$$

故成立

$$\|XY\|_r=(\mathsf{E}|XY|^r)^{\frac{1}{r}}\leqslant\|X\|_p\|Y\|_q.$$

取$r=1$得Hölder不等式(20.2). 再在(20.1)中取$Y=1$即得 i).

iii) (20.3)是直接的. 对(20.4)，当$p=\infty$时，它可由

$$P(|X+Y|>x+y)\leqslant P(|X|>x)+P(|Y|>y)$$

推出；而$p<\infty$时，只要在(18.2)中取$U=|X|^p$，$V=|Y|^p$即可. #

21　定义　对随机变量等价类规定

$$L^p(\Omega,\mathscr{F},P)=\{X: X\text{ 为 r.v.}, \|X\|_p<\infty\},$$

简称L^p空间. 对L^p中元素列$\{X_n\}$及Y，若

$$\lim_n\|X_n-Y\|_p=0,$$

则称$\{X_n\}$ p次(p阶)平均收敛于Y，记为$X_n\xrightarrow{L^p}Y$. 由于$p<\infty$时

$$P(|X_n-Y|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon^{-p}\mathsf{E}|X_n-Y|^p.$$

所以$X_n\xrightarrow{L^p}Y$，必有$X_n\xrightarrow{P}Y$，因而L^p收敛的极限是唯一的(按等价类来看).

22　命题　$\|\cdot\|_p$是L^p中范数，L^p是线性赋范空间.

证　这是命题20的直接结论. #

23 命题 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 及 L^p 中元素列 $\{X_n\}$，下列两个条件等价

i) $X_n \xrightarrow{L^p} X$；

ii) $\{X_n\}$ 是 L^p 中基本列，即 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|X_m-X_n\|_p=0$。

当 $1\leqslant p<\infty$ 时，上述条件又与下列条件等价

iii) $\{|X_n|^p, n\geqslant 1\}$ 一致可积，且 $X_n \xrightarrow{p} X$。

证 i)→ ii) 由 $\|X_n-X_m\|_p\leqslant\|X_n-X\|_p+\|X-X_m\|_p$，可得.

设 $p=\infty$：ii)⇒ i) $\{X_n\}$ 为 L^∞ 基本列相当于除去可略集外，按一致收敛的意义下 $\{X_n\}$ 为基本的，且 $\{X_n\}$ 为一致有界的，因而存在 $X\in L^\infty$，且 $\|X_n-X\|_\infty\to 0$。

设 $p<\infty$：ii)⇒iii) 对任一 $\varepsilon>0$，

$$P(|X_n-X_m|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^p}\mathsf{E}|X_n-X_m|^p\to 0\ (m,n\to\infty).$$

故 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 按依概率收敛为基本的，必有有限 r.v. X，使 $X_n\xrightarrow{p}X$。另一方面，若取 $N(\varepsilon)$ 满足当 $m,n\geqslant N(\varepsilon)$ 时 $\|X_m-X_n\|_p<\varepsilon$，则

$$\sup_n\|X_n\|_p\leqslant\sup_{n\leqslant N(\varepsilon)}\|X_n\|_p+\sup_{n>N(\varepsilon)}\|X_n-X_{N(\varepsilon)}\|_p<\infty,$$

故 $\sup\limits_n\mathsf{E}|X_n|^p<\infty$。又利用 $|a+b|^p\leqslant 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$，有

$$\sup_n\int_A|X_n|^p dP\leqslant 2^{p-1}\Big(\sup_{n\leqslant N(\varepsilon)}\int_A|X_n|^p dP+\sup_{n>N(\varepsilon)}\int_A|X_n-X_{N(\varepsilon)}|^p dP\Big)$$

先令 $P(A)\to 0$，再令 $\varepsilon\to 0$，可得 $\{\int_A|X_n|^p dP, n\geqslant 1\}$ 是一致绝对连续的，故由命题 14，$\{|X_n|^p, n\geqslant 1\}$ 是一致可积的。

iii)⇒ i) 由引理 9，必有子序列 $\{X_{n_k}, k\geqslant 1\}$ 使 $X_{n_k}\to X$ a.s.，由 Fatou 引理

$$\mathsf{E}|X|^p=\mathsf{E}\lim_k|X_{n_k}|^p\leqslant\varliminf_n\mathsf{E}|X_{n_k}|^p\leqslant\sup_n\mathsf{E}|X_n|^p<\infty,$$

即 $X\in L^p$。$\{|X-X_n|^p, n\geqslant 1\}$ 亦一致可积，$|X-X_n|^p\xrightarrow{p}0$，由命题 16 即得 $\lim\limits_n\mathsf{E}|X_n-X|^p=0$。#

24 系 对 $p\in[1,\infty[$ 及 r.v. 序列 $\{X_n, n\geqslant 1\}$，若存在 $Y\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$，使对每个 n 有 $|X_n|\leqslant Y$，则下列两个条件等价

i) $X_n \xrightarrow{P} X \quad (n\to\infty)$;

ii) $X_n \xrightarrow{L^p} X \quad (n\to\infty)$.

25 命题 对$p\in[1,\infty]$,L^p为 Banach 空间,且是一个完备格.

证 由命题 22,L^p是线性赋范空间;由命题 23,L^p是完备的. 所以它是一个 Banach 空间.

若$X,Y\in L^p$,则因$|X\vee Y|(|X\wedge Y|)\leqslant|X|+|Y|\in L^p$,所以$L^p$是一个格. 若$\{X_i,i\in I\}\subset L^p$且有界,即对每个$i\in I$,$|X_i|\leqslant Y\in L^p$,则$|\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i|\leqslant Y$,所以$\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i\in L^p$. 同理,$\operatorname{ess\,inf}_{i\in I} X_i\in L^p$. 这样$L^p$作为一个格也是完备的. #

26 命题 若在$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$中取

$$(X,Y)=\mathbf{E}(XY),$$

则(X,X)是内积,$L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$是 Hilbert 空间,且也是一个完备格.

证 可直接验证(X,Y)满足内积要求,且$\|X\|_2=\sqrt{(X,X)}$. #

27 定义 若X为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上 r. v.,$p>0$,$\mathbf{E}|X|^p$称为X的(或X分布的)p阶绝对矩,$\mathbf{E}X^p$(若其存在)称为X的p阶矩,$\operatorname{var}X\triangleq\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2$称为$X$的方差,方差的平方根(非负的)称为标准差. 若$Y$亦为 r. v.,$\operatorname{cov}(X,Y)\triangleq\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)(Y-\mathbf{E}Y)$称为$X,Y$的协方差.

$$\rho(X,Y)=\begin{cases}\operatorname{cov}(X,Y)/\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}, & \operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)\neq 0;\\ 0, & \operatorname{var}(X)\cdot\operatorname{var}(Y)=0\end{cases}$$

称为X,Y的相关系数. $\mathbf{E}XY=0$称X,Y为正交的,$\rho(X,Y)=0$称X,Y为互不相关的.

由(20.2)可得

$$|\operatorname{cov}(X,Y)|\leqslant\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)},$$

$$|\rho(X,Y)|\leqslant 1.$$

由(3.6.4)可得下列 Чебышев 不等式

$$P(|X-\mathbf{E}X|\geqslant a)\leqslant\frac{1}{a^2}\operatorname{var}(X)\quad(a>0).$$

§5 乘积可测空间上的测度

一、二维乘积空间上的测度

1 定义 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1),(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$为两个可测空间，$P(\omega_1,A_2)$为$\Omega_1\times\mathscr{F}_2$到$[0,1]$的函数，若满足i) 对每个$\omega_1\in\Omega_1$，$P(\omega_1,\cdot)$是$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上的概率测度；ii) 对每个$A_2\in\mathscr{F}_2$，$P(\cdot,A_2)$是$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$上可测函数，则称$P$为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$到$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$的**转移概率**.

2 例 $(\Omega_1,\mathscr{F}_1),(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$是两个可测空间. i) $Q(\cdot)$是$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上的概率测度，则$P(\omega_1,A_2)=Q(A_2)$是一个转移概率；ii) f为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$到$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$的可测映照，则$P(\omega_1,A_2)=I_{A_2}(f(\omega_1))$也是一个转移概率.

注 在定义1中，若i)成立，则只需对生成$\mathscr{F}_2$的一个半域$\mathscr{S}_2$上的每个$A_2\in\mathscr{S}_2$，$P(\cdot,A_2)$为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$上可测函数，就能保证P是转移概率.

3 定理 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1),(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$为两个可测空间，$P_1$为$(\Omega_1,\mathscr{F}_1)$上的概率测度，$P_{12}$是转移概率，则

i) 在$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$上存在唯一概率测度$P$，满足

$$P(A_1\times A_2)=\int_{A_1}P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(d\omega_1),A_1\in\mathscr{F}_1,A_2\in\mathscr{F}_2;\quad(3.1)$$

ii)对$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P)$上每个非负(或准可积) r.v. X，若$X_{\omega_1}(\cdot)=X(\omega_1,\cdot)$表示$X$的$\omega_1$截口，则

$$Y(\omega_1)=\int_{\Omega_2}X_{\omega_1}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,\mathrm{d}\omega_2)\quad(3.2)$$

是Ω_1上关于P_1 a.s. 有定义且非负(对P_1准可积)$\mathscr{F}_1$可测 r.v.，进而有

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}XdP=\int_{\Omega_1}P_1(d\omega_1)\int_{\Omega_2}X_{\omega_1}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2).\quad(3.3)$$

证 i) 记$\mathscr{C}=\{A_1\times A_2;A_1\in\mathscr{F}_1,A_2\in\mathscr{F}_2\}$为$\Omega_1\times\Omega_2$中可测矩形全

体，它是一个半域．由定理 2.7，只需证明由 (3.1) 规定的 P 在 $\mathscr{C}$ 上为概率测度．首先 $P(A_1\times A_2)\in[0,1]$ 及 $P(\Omega_1\times\Omega_2)=1$ 是明显的．其次，若 $A_1\times A_2=\sum_{i=1}^{\infty}A_{1i}\times A_{2i}$，$A_1,A_{1i}\in\mathscr{F}_1$，$A_2,A_{2i}\in\mathscr{F}_2$，则必有

$$I_{A_1}(\omega_1)I_{A_2}(\omega_2)=I_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)=\sum_{i=1}^{\infty}I_{A_{1i}}(\omega_1)I_{A_{2i}}(\omega_2).$$

注意到上式右端各项为非负的，对上式两端在 Ω_2 上按 $P_{12}(\omega_1,\cdot)$ 积分，并利用 Levi 引理，可得

$$\begin{aligned}I_{A_1}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_2)&=\int_{\Omega_2}I_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_2}I_{A_{1i}}(\omega_1)I_{A_{2i}}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}I_{A_{1i}}(\omega_2)P_{12}(\omega_1,A_{2i}).\end{aligned}$$

再在 Ω_1 上按 P_1 积分，仍利用 Levi 引理可得

$$\begin{aligned}P(A_1\times A_2)&=\int_{\Omega_1}I_{A_1}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(\mathrm{d}\omega_1)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\Omega_1}I_{A_{1i}}(\omega_1)P_{12}(\omega_1,A_{2i})P_1(\mathrm{d}\omega_1)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_{1i}\times A_{2i}),\end{aligned}$$

故 P 为 $\mathscr{C}$ 上的概率测度．由延拓定理 2.7，即得 i) 的结论．

ii) 记 $\mathscr{C}=\{A_1\times A_2: A_i\in\mathscr{F}_i, i=1,2\}$，它是一个 π 类，又令

$$\mathscr{L}=\{(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)\text{ 上有界 r.v. 全体}\},$$

$$\mathscr{H}=\{X: X\in\mathscr{L}\text{ 且使 ii) 成立}\},$$

则由 (3.1) 可知 $\mathscr{H}\supset\{I_A: A\in\mathscr{C}\}$，又利用积分线性性及 Levi 引理，可知 $\mathscr{H}$ 是一个 $\mathscr{L}$ 类，因而 $\mathscr{H}$ 包含一切 $(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上有界 r.v.，即对有界 r.v. ii) 成立．又利用 Levi 引理（和积分线性性），可知 ii) 对一切非负（准可积）r.v. 成立．#

4 系 在定理 3 的假定下，对 $(\Omega_1\times\Omega_2,\ \mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$ 上每个非负

r.v.X,

$$\int XdP=0 \iff \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}P_{12}(\omega_1,d\omega_2)=0 \quad \text{a.s.}P_1,$$

$$\int XdP<\infty \Longrightarrow \int_{\Omega_2} X_{\omega_1}P_{12}(\omega_1,d\omega_2)<\infty \text{ a.s.}P_1.$$

5 系 在定理 3 的假定下, i)在$(\Omega_2,\mathscr{F}_2)$上存在唯一的概率测度 P_2,满足

$$P_2(A_2)=\int_{\Omega_2} P_{12}(\omega_1,A_2)P_1(d\omega_1) \quad A_2\in\mathscr{F}_2;$$

ii) 对$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$上每个非负(准可积) r.v.$Z$、

$$Y(\omega_1)=\int_{\Omega_1} Z(\omega_2)P_{12}(\omega_1,d\omega_2)$$

为Ω_1上关于P_1为 a.s. 确定的$\mathscr{F}_1$可测非负(准可积)$r.v.$,进而有

$$\int_{\Omega_2} Z(\omega_2)P_2(d\omega_2)=\int_{\Omega_1} Y(\omega_1)P_1(d\omega_1).$$

6 定理 (Fubini) 设$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$和$(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$为两个概率空间,则在$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$上存在唯一的一个概率测度$P$, 满足

$$P(A_1\times A_2)=P_1(A_1)P_2(A_2), \quad A_1\in\mathscr{F}_1, A_2\in\mathscr{F}_2. \tag{6.1}$$

且对$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P)$上任一非负(准可积)$r.v.X$, 下式各项有意义,且成立

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} XdP=\int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1)\int_{\Omega_2} X(\omega_1,\omega_2)P_2(d\omega_2)$$

$$=\int_{\Omega_2} P_2(d\omega_2)\int_{\Omega_1} X(\omega_1,\omega_2)P_1(d\omega_1). \tag{6.2}$$

证 只要按定理 2 及系 4 分别取P_1, $P_{12}(\omega_1,A_2)=P_2(A_2)$及$P_2$, $P_{21}(\omega_2,A_1)=P_1(A_1)$分别在$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2)$上构造测度, 并证明两者是一致的, 其它都可由定理 3 及系 4 推出. ‡

7 定义 由(6.1)规定的测度称为P_1, P_2的乘积测度, 记为$P=P_1\times P_2$. 又记$(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P)=(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)\times(\Omega_2,\mathscr{F}_2,$

P_2)，称为乘积概率空间.

8 系 i) $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2,P_1\times P_2)$ 上的 r.v. X a.s.P为零，当且仅当它的几乎每个 ω_1 截口 X_{ω_1} 在 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$ 上 a.s.P_2 为零.

ii) r.v.X 在乘积概率空间上可积，则 a.s. 截口 X_{ω_1} 在 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$ 可积.

9 系 若 $\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$ 表 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 关于 $P_1\times P_2$ 的完备化扩张，$\overline{\mathscr{F}_2}$ 表 $\mathscr{F}_2$ 关于 P_2 的完备化扩张，则对每个 $\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$ 可测 r.v.X，其 a. s. 截口 X_{ω_1} 关于 $\overline{\mathscr{F}_2}$ 可测，且 (6.2) 对非负(准可积) $\overline{\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2}$ 可测 r.v.X 仍成立.

证 取 $\mathscr{F}_1\times\mathscr{F}_2$ 可测 r.v.X'，使 $\{X\neq X'\}$ 为可略集，这时 X'_{ω_1} $\mathscr{F}_2$ 可测，且对 a.s.ω_1，$\{X'_{\omega_1}\neq X_{\omega_1}\}$ 为 $(\Omega_2,\mathscr{F}_2,P_2)$ 可略集，由此即可推出系中的结论. #

10 命题(分部积分公式) 若 f, g 为 $[a,b]$ 上的右连续有界递增函数，由 f,g 产生的 L-S 测度仍分别用 f,g 表示，则

$$\int_{]a,b]} f(x)dg(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_{]a,b]} g(x-)df(x), \quad (10.1)$$

$$\int_{]a,b]} f(x-)dg(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)$$

$$-\int_{]a,b]} g(x-)df(x)-\sum_{a<x\leqslant b}\triangle g(x)\triangle f(x), \qquad (10.2)$$

其中 $\triangle g(x)=g(x)-g(x-)$, $\triangle f(x)=f(x)-f(x-)$.

证 若 f 或 g 为常数，则 (10.1) 显然成立，故不妨设 $f(a)=g(a)=0$. 在 $]a,b]\times]a,b]$ 上，令 $\mu=f\times g$. 则

$$f(b)g(b)=\iint_{]a,b]\times]a,b]} d\mu=\iint_{a<x\leqslant y\leqslant b} df(x)dg(y)+\iint_{a<y<x\leqslant b} df(x)dg(y)$$

$$=\int_{]a,b]} f(y)dg(y)+\int_{]a,b]} g(x-)df(x),$$

即 (10.1) 成立. 类似地，分解

$$]a,b]\times]a,b]=\{a<x<y\leqslant b\}\cup\{a<x=y\leqslant b\}\cup\{a<y<x\leqslant b\},$$

可得(10.2).*

11 例 若$\varphi(x)$为非负可测函数,X为非负r.v.又$\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$

则

$$\mathsf{E}\,\Phi(X)=\int_0^\infty\varphi(x)P(X>x)dx.$$

证 若用$F(x)$记为X的分布函数,则用Fubini定理有

$$\mathsf{E}\,\Phi(X)=\int_0^\infty \Phi(x)dF(x)=\int_0^\infty\int_0^x \varphi(t)dt\,dF(x)$$

$$=\int_0^\infty \varphi(t)\left(\int_t^\infty dF(x)\right)dt=\int_0^\infty \varphi(t)P(X\geqslant t)dt.*$$

12 命题 设$p>0$,F为r.v.X的分布函数,则

i) 若$X\in L^p$,则对任意满足

$$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=p,\qquad \alpha>-1,\beta,\gamma>0 \tag{12.1}$$

的α,β,γ成立

$$\sum_{n=1}^\infty n^\alpha\int_{|x|>n^\beta}|x|^\gamma dF(x)<\infty. \tag{12.2}$$

反之,若对某一组满足(12.1)的α,β,γ(12.2)成立,则$X\in L^p$;

ii) 若$X\in L^p$,则对任意满足

$$\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma=p,\qquad \alpha<-1,\beta,\gamma>0 \tag{12.3}$$

的α,β,γ成立

$$\sum_{n=1}^\infty n^\alpha\int_{|x|\leqslant n^\beta}|x|^\gamma dF(x)<\infty \tag{12.4}$$

反之,若对某一组满足(12.3)的α,β,γ(12.4)成立,则$X\in L^p$.

证 i) 我们有

$$\int_0^\infty y^\alpha \int_{|x|>y^\beta} |x|^\gamma dF(x)dy=\int_0^\infty x^\gamma\left(\int_0^{x^{1/\beta}} y^\alpha dy\right)d\overline{F}(x)$$

$$=\frac{1}{\alpha+1}\int_0^\infty x^{\gamma+\frac{\alpha+1}{\beta}}\ d\overline{F}(x)=\frac{1}{\alpha+1}\ E|X|^p$$

其中 $\overline{F}$ 表示 $|X|$ 的分布函数，而上式左端积分的收敛性与(12.2)等价是容易证明的.

ii) 又有

$$\int_0^\infty y^\alpha \int_{|x|<y^\beta}|x|^\gamma dF(x)dy=\int_0^\infty x^\gamma\left(\int_{x^{1/\beta}}^\infty y^\alpha dy\right)d\overline{F}(x)$$

$$=-\frac{1}{1+\alpha}\int_0^\infty x^{\gamma+\frac{\alpha+1}{\beta}}\ dF(x)=-\frac{1}{1+\alpha}\ \mathbf{E}|X|^p,$$

其中 $\overline{F}$ 仍表示 $|X|$ 的分布函数，而上式左端积分的收敛性与(12.4)等价亦是容易说明的. #

13 系 i) 为使 $\mathbf{E}|X|<\infty$，充要的是 $\sum_{n=1}^{\infty}P(|X|>n)<\infty$;

ii) 为使 $\mathbf{E}|X|<\infty$，充要的是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathbf{E}(|X|^2 I_{\{|X|<n\}})<\infty$.

证 i) 在(12.2)中取 $\alpha=0,\beta=1,\gamma=0$.

ii) 在(12.4)中取 $\alpha=-2,\beta=1,\gamma=2$. #

二、无限维乘积空间上的测度

14 设 $T=\{t:t\in T\}$ 为任意指标集，$\{(\Omega_t,\mathscr{F}_t):t\in T\}$ 为一族可测空间，

$$\Omega=\mathop{\times}_{t\in T}\Omega_t,\qquad \mathscr{F}=\mathop{\times}_{t\in T}\mathscr{F}_t.$$

又 $T_1\subset T$，T_1 为 T 的任一子集，记

$$\Omega_{T_1}=\mathop{\times}_{t\in T_1}\Omega_t,\qquad \mathscr{F}_{T_1}=\mathop{\times}_{t\in T_1}\mathscr{F}_t,$$

则 $\Omega=\Omega_T,\mathscr{F}=\mathscr{F}_T$. 又对 $A\in\mathscr{F}_{T_1}$,

$$B_1=\{(\omega_t,t\in T):(\omega_\alpha,\alpha\in T_1)\in A,\omega_t\in\Omega_t,t\in T\},$$

称 B_1 为以 A 为基底的 Ω 中柱集. 对 $T_1\subset T_2\subset T$,

$$B_2=\{(\omega_t,\ t\in T_2):(\omega_\alpha,\alpha\in T_1)\in A,\omega_t\in\Omega_t,t\in T_2\}.$$

我们称 B_2 为以 A 为基底的 Ω_{T_2} 中的柱集. $\mathscr{F}_{T_1}$ 和 $\mathscr{F}_{T_1}^{T_2}$ 分别表示基底在 $\mathscr{F}_{T_1}$ 的 Ω 和 Ω_{T_2} 中柱集全体.

设以 $\mathscr{C}$ 表示基底为有限维可测矩形的 Ω 中柱集全体, $\mathscr{A}=\bigcup_{\substack{T_1\subset T\\ T_1\text{有限}}}\mathscr{F}_{T_1}$ 表有限维可测基底的 Ω 中柱集全体, 则由 §1.3 的结果可知, $\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$, 且 $\mathscr{A}$ 为域. $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{F}$.

若 $T_1\subset T_2\subset T$, 规定 Ω_{T_2} 到 Ω_{T_1} 的映照 $\pi_{T_1}^{T_2}$ 如下:

$$\pi_{T_1}^{T_2}\{\omega_t:t\in T_2\}=\{\omega_t:t\in T_1\},$$

则 $\pi_{T_1}^{T_2}$ 是 Ω_{T_2} 到 Ω_{T_1} 的投影. 对 $A\in\mathscr{F}_{T_1}$, 由于

$$(\pi_{T_1}^{T_2})^{-1}A=A\times\Omega_{T_2\setminus T_1},$$

所以 $\pi_{T_1}^{T_2}$ 是 $(\Omega_{T_2},\mathscr{F}_{T_2})$ 到 $(\Omega_{T_1},\mathscr{F}_{T_1})$ 的可测映照, 且

$$(\pi_{T_1}^{T_2})^{-1}\mathscr{F}_{T_1}=\mathscr{F}_{T_1}^{T_2}.$$

若 P_{T_2} 为 $(\Omega_{T_2},\mathscr{F}_{T_2})$ 上的概率, 则 $P_{T_2}(\pi_{T_1}^{T_2})^{-1}$ 为 $(\Omega_{T_1},\mathscr{F}_{T_1})$ 上的概率. 反之, 对 $B\in\mathscr{F}_{T_1}^{T_2}$, 必存在完全确定的 $A=\pi_{T_1}^{T_2}(B)\in\mathscr{F}_{T_1}$, 使 $B=(\pi_{T_1}^{T_2})^{-1}A$. 所以对 $(\Omega_{T_1},\mathscr{F}_{T_1})$ 上的概率 P_{T_1}, 由

$$Q(B)=Q\Big((\pi_{T_2}^{T_1})^{-1}A\Big)=P(A),$$

亦可完全确定地在 $(\Omega_{T_2},\mathscr{F}_{T_1}^{T_2})$ 上规定一个概率 Q. 特别地由 P_{T_1} 可在 $(\Omega,\mathscr{F}_{T_1})$ 上规定一个概率.

命题 设对 T 的有限子集 $T_1=(t_1,\ \cdots,\ t_n)\subset T$, P_{T_1} 为 $(\Omega_{T_1},\mathscr{F}_{T_1})$ 上的概率测度, 则对测度族 $\{P_{T_1}$, 有限 $T_1\subset T\}$, 在 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上存在非负有限可加集函数 P, 满足

$$P(\pi_{T_1}^{T})^{-1}=P_{T_1},\ \text{对每个有限}\ T_1\subset T. \tag{14.1}$$

其充要条件是 $\{P_{T_1}, T_1\subset T\}$ 满足下列相容性条件：对 T 的任意有限子集 $T_1, T_2, T_1\subset T_2$，有

$$P_{T_2}(\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}=P_{T_1} \tag{14.2}$$

证　必要性．由于 $\pi^T_{T_1}=\pi^{T_2}_{T_1}\pi^T_{T_2}$，故对 $A\in\mathscr{F}_{T_1}$

$$(\pi^T_{T_1})^{-1}A=(\pi^T_{T_2})^{-1}(\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A.$$

因此，若存在 P 满足 (14.1)，必有

$$P_{T_1}(A)=P((\pi^T_{T_1})^{-1}A)=P((\pi^T_{T_2})^{-1}(\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A)=P_{T_2}((\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A),$$

即 (14.2) 成立．

充分性．主要是说明按(14.1)可在 $\mathscr{A}$ 上完全确定地规定 P．若 $B\in\mathscr{A}$，$B=A\times\Omega_{T-T_1}=A'\times\Omega_{T-T_1'}$，$A\in\mathscr{F}_{T_1}$，$A'\in\mathscr{F}_{T_1'}$，$T,T'$ 是 T 的有限子集，则可取 $T_2=T_1\cup T_1'$，且可将 B 记为

$$B=A\times\Omega_{T-T_1}=((\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A)\times\Omega_{T-T_2}$$

$$=A'\times\Omega_{T-T_1'}=((\pi^{T_2}_{T_1'})^{-1}A')\times\Omega_{T-T_2}$$

由此，$(\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A=(\pi^{T_2}_{T_1'})^{-1}A'$．由 (14.2)，

$$P_{T_1}(A)=P_{T_2}((\pi^{T_2}_{T_1})^{-1}A)=P_{T_2}((\pi^{T_2}_{T_1'})^{-1}A')=P_{T_1'}(A').$$

所以对有限维可测基底柱集 B，虽然其基底不是唯一的，但取其任一基底 A，规定

$$P(B)=P_{T_1}(A),$$

P 的这一规定与基底取法无关．利用 P_{T_1} 是 $\mathscr{F}_{T_1}$ 上的概率，容易说明 P 为 $\mathscr{F}_{T_1}$ 上概率，进而可说明 P 在 $\mathscr{A}$ 上是非负有限可加的．∎

15　系　设对每个 $t\in T$，$\Omega_t=R^1$．$\Omega=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t=R^T$，$\mathscr{B}_{t_1\cdots t_n}$ 表示 R^T 中基底为 $R_{t_1}\times\cdots\times R_{t_n}$ 中 n 维Borel集的柱集全体，$\mathscr{A}=\bigcup\limits_{\{t_1,\cdots t_n\}\,n\geqslant 1}\mathscr{B}_{t_1\cdots t_n}$．又对 T 的每个有序子集 $\{t_1,\cdots,t_n\}$，$F_{t_1\cdots t_n}(x_1\cdots x_n)$ 为一有限维分布函数，则对有限维分布函数族 $\mathscr{G}=\{F_{t_1\cdots t_n}, t_i\in T, n\geqslant 1\}$ 在 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上存在非负有限可加集函数 P，满足

$$P\{(\omega_t, t\in T): \omega_t\in R, \omega_{t_i}\leqslant x_i, 1\leqslant i\leqslant n\}=F_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_n) \tag{15.1}$$

的充要条件是

i) 对称性：对 $(1,\cdots,n)$ 的任一排列 $(\pi(1),\cdots,\pi(n))$

$$F_{t_{\pi(1)}\cdots t_{\pi(n)}}(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(n)})=F_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_n); \qquad (15.2)$$

ii) 相容性：

$$F_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_{n-1},+\infty)=F_{t_1\cdots t_{n-1}}(x_1,\cdots,x_{n-1}) \qquad (15.3)$$

证 只需指出，(15.2) 保证了由 $\mathscr{G}$ 可在 $(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n} R_{t_i},\mathscr{B}_{t_1\cdots t_n})$ 上完全确定地规定一个概率测度，其它各点可由命题 14 推出。 ∎

16 定理 设 $\{P_{t_1\cdots t_n},t_1,\cdots,t_n\in T\}$ 为 $\{(\Omega_t,\mathscr{F}_t),t\in T\}$ 的有限维乘积空间上的满足命题 14 相容性条件 (14.2) 的概率测度族. 又对每个 $t\in T$，存在 $\mathscr{F}_t$ 的子类 $\mathscr{C}_t$ 具有限交性质，且

$$P_t(A)=\sup\{P_t(C):C\in\mathscr{C}_t,C\subset A\},A\in\mathscr{F}_t, \qquad (16.1)$$

则在 $(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t,\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\mathscr{F}_t)$ 上存在唯一概率测度 P，满足

$$P(\pi_{T_1}^{T})^{-1}=P_{T_1}, \quad 对每个有限 T_1\subset T. \qquad (16.2)$$

证 由命题 14，在 $(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t,\mathscr{A})$ 上存在 P 是有限可加的，且满足 (16.2) 及 $P(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t)=1$. 又因 $\mathscr{A}$ 是一个域，因而只要证明 P 在 $\mathscr{A}$ 上是 σ 可加的. 若记 $\mathscr{S}$ 为 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t$ 上有限维可测矩形全体构成的半域，由 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{S})$ 及定理 2.7，只需证明 P 在 $\mathscr{S}$ 上 σ 可加即可.

记 $\mathscr{D}=\{C_t\times(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{s\neq t}\Omega_s),C_t\in\mathscr{C}_t,t\in T\}$，则 $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}$. 欲证 $\mathscr{D}$ 具有有限交性质. 若 $D_n=C_{t_n}^{(n)}\times(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{s\neq t_n}\Omega_s)$，$C_{t_n}^{(n)}\in\mathscr{C}_{t_n}$，则

$$\bigcap_n D_n=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}B_t, \qquad B_t=\bigcap_{(n:t_n=t)}C_{t_n}^{(n)},$$

因而由 $\bigcap\limits_n D_n=\varnothing$ 可推出至少有一个 $u\in T$，$B_u=\varnothing$，也即 $\bigcap\limits_{(n:t_n=u)}C_{t_n}^{(n)}=\varnothing$. 这时由 $\mathscr{C}_u$ 的有限交性质，必有 $\{n:t_n=u\}$ 的有限子集 J，使 $\bigcap\limits_{n\in J}C_{t_n}^{(n)}=\varnothing$. 由此

$$\bigcap_{n\in J}D_n=\bigcap_{n\in J}(C_{t_n}^{(n)}(\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\neq t_n}\Omega_t))=\varnothing,$$

即 $\mathscr{D}$ 具有有限交性质. 进而容易验证 $\mathscr{D}_\delta=\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n,D_n\in\mathscr{D}\}$ 也必具有

有限交性质．

再证 $\mathscr{D}_\delta$ 中的集可"逼近"$\mathscr{S}$ 中的集．若

$$A=\mathop{\mathsf{X}}_{i=1}^{n} A_{t_i}\times(\mathop{\mathsf{X}}_{\substack{t\neq t_i\\1\leqslant i\leqslant n}}\Omega_t),\quad A_{t_i}\in\mathscr{F}_{t_i}\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

对每个 i 取 $C_{t_i}\in\mathscr{C}_{t_i}$，满足

$$P_{t_i}(C_{t_i})>P_{t_i}(A_{t_i})-\varepsilon/n,\quad C_{t_i}\subset A_{t_i},$$

则

$$D=\bigcap_{i=1}^{n}(C_{t_i}\times(\mathop{\mathsf{X}}_{t\neq t_i}\Omega_t))\in\mathscr{D}_\delta,\quad D\subset A,$$

且

$$A-D\subset\bigcup_{i=1}^{n}[(A_{t_i}-C_{t_i})\times(\mathop{\mathsf{X}}_{t\neq t_i}\Omega_t)]$$

$$P(A)-P(D)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big(P_{t_i}(A_{t_i})-P_{t_i}(C_{t_i})\Big)<\varepsilon.$$

由于 ε 可是任意正数，故可得对任一 $A\in\mathscr{S}$，

$$P(A)=\sup\{P(D):D\subset A,\ D\in\mathscr{D}_\delta\}.$$

所以由命题 2.10，P 在 $\mathscr{S}$ 上 σ 可加，P 必可唯一地延拓到 $\mathscr{F}_T$ 上且满足 (16.2)．

17．系（Колмогоров 定理） 设对每个 $t\in T$，$(R_t,\mathscr{B}_t)=(R^1,\mathscr{B}^1)$，$\mathscr{G}=\{F_{t_1\cdots t_n}:t_1,\cdots,t_n\in T\}$ 为 $\{(R_t,\mathscr{B}_t):t\in T\}$ 的有限维乘积空间上的相容分布函数族（满足 (15.2)，(15.3)），则在 $(R^T,\mathscr{B}^T)=\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T}(R_t,\mathscr{B}_t)$ 上存在唯一概率测度 P，使 P 以 $\mathscr{G}$ 为有限维分布函数族，即 (15.1) 成立．

注 上述 $(R^T,\mathscr{B}^T,P)$ 又称标准概率空间．

18 定理 $\{(\Omega_t,\mathscr{F}_t,P_t),t\in T\}$ 为一族概率空间，则在 $(\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T}\Omega_t,\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T}\mathscr{F}_t)$ 上存在唯一概率测度 P 满足

$$P(\pi_{T_1}^{T})^{-1}=\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T_1}P_t,\qquad 对每个有限\ T_1\subset T.\tag{18.1}$$

证 对有限 $T_1\subset T$，取 $P_{T_1}=\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T_1}P_t$，则容易说明 $\{P_{T_1}$，有限 $T_1\subset T\}$ 满足相容性条件 (14.2)，因此由命题 14 可知按 (16.2) 可规定 P 使之为有限可加的，且 $P(\mathop{\mathsf{X}}_{t\in T}\Omega_t)=1$．因而还只需证明 P 在 $\mathscr{A}$ 上为 σ 可加

的. 为此我们说明对 $\mathscr{A}$ 中每个递减趋于$\varnothing$的序列 $\{A_n\}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n)=0. \tag{18.2}$$

由于 A_n 都是有限维柱集, 我们不妨假定有 T 的可列子集 $\{t_n\}$, 使每个 A_n 都是基底在 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{n}\mathscr{F}_{t_i}$ 的有限维柱集. 若 T_n 为 T 的有限子集, 记 $\Omega_{T_n}=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T_n}\Omega_t$, $P_{T_n}=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T_n}P_t$. 又令 P^{T_n} 为 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T-T_n}\Omega_t$ 上对有限维可测柱集规定的可加集函数, 它满足

$$P^{T_n}(\pi_{u_1\cdots u_k}^{T-T_n})^{-1}=\mathop{\mathsf{X}}\limits_{i=1}^{k}P_{u_i},\quad u_1,\cdots,u_k\in T_n,$$

则由 Fubini 定理, 对有限维可测柱集 $A=B\times\Omega_{T-T_k}$, $B\in\mathscr{F}_{T_k}$, 若 $T_n=(t_1,\cdots,t_n)\subset T_k$, $A(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})$ 表示 A 的 $(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n})$ 截口, 有

$$\begin{aligned}P(A)&=P((\pi_{T_k}^{T})^{-1}B)=P_{T_k}(B)\\&=\iint I_B dP_{T_k-T_n}dP_{T_n}=\int P_{T_k-T_n}(B(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n}))dP_{T_n}\\&=\int P^{T_n}(A(\omega_{t_1},\cdots,\omega_{t_n}))dP_{T_n}.\end{aligned}\tag{18.3}$$

我们用反证法来证明 (18.2). 若对某递减序列 $\{A_n\}$ (18.2) 不真, 则有某个 $\varepsilon>0$, 对每个 n 有 $P(A_n)\geqslant\varepsilon$. 令

$$B_n=\{\omega_{t_1}:P^{(t_1)}(A_n(\omega_{t_1}))\geqslant\varepsilon/2\},$$

则由 (18.3),

$$\varepsilon\leqslant P(A_n)=\int P^{(t_1)}(A_n(\omega_{t_1}))P_{t_1}(d\omega_{t_1})$$

$$=\int_{B_n}+\int_{B_n^c}P^{(t_1)}(A_n(\omega_{t_1}))P_{t_1}(d\omega_{t_1})\leqslant P_{t_1}(B_n)+\varepsilon/2,$$

故 $P_{t_1}(B_n)\geqslant\varepsilon/2$. 又由于 $\{B_n\}$ 为 $\mathscr{F}_{t_1}$ 中递减序列, 因而由 P_{t_1} 为 $(\Omega_{t_1},\mathscr{F}_{t_1})$ 上概率测度可知, 必存在 $\overline{\omega}_{t_1}\in\bigcap\limits_n B_n$. 这时

$$P^{(t_1)}(A_n(\overline{\omega}_{t_1}))\geqslant\varepsilon/2\quad(n\geqslant1).$$

把刚才用于 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\in T}\Omega_t$, A_n, ε 的论证, 现在用于 $\mathop{\mathsf{X}}\limits_{t\neq t_1}\Omega_t$, $A_n(\overline{\omega}_{t_1})$, $\varepsilon/2$, 可得 $\overline{\omega}_{t_2}\in\Omega_{t_2}$ 满足

$$P^{(t_1t_2)}(A_n(\overline{\omega}_{t_1},\ \overline{\omega}_{t_2}))\geqslant\varepsilon/4\ \ (n\geqslant 1).$$

继续这一过程可得$\overline{\omega}_{t_j}\in\Omega_{t_j}$，使

$$P^{(t_1\cdots t_j)}(A_n(\overline{\omega}_{t_1},\cdots,\overline{\omega}_{t_j}))\geqslant\varepsilon/2^j\ \ (n\geqslant 1,\ j\geqslant 1).$$

现在对$t\neq t_j, j\geqslant 1$，任取$\overline{\omega}_t\in\Omega_t$。我们来证明$\overline{\omega}=(\overline{\omega}_t, t\in T)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$。在此$A_n$是基底在$\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n}\mathscr{F}_{t_j}$的柱集。由于$A_1$是基底在$\mathscr{F}_{t_1}$的柱集，$P^{(t_1)}(A(\overline{\omega}_{t_1}))\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$，故$A(\overline{\omega}_{t_1})$非空，$\overline{\omega}\in A_1$。同理$P^{(t_1\cdots t_j)}(A_j(\overline{\omega}_{t_1},\cdots,\overline{\omega}_{t_j}))\geqslant\varepsilon/2^j$，故$A_j(\overline{\omega}_{t_1},\cdots,\overline{\omega}_{t_j})$非空；又$A_j$是基底在$\mathscr{F}_{t_1\cdots t_j}$的柱集，所以有$\overline{\omega}\in A_j$，从而$\overline{\omega}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$，$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$是非空的。这一矛盾表明，对$\mathscr{A}$的每个递减趋于$\varnothing$的$\{A_n\}$，(18.2)成立，所以$P$在$\mathscr{A}$上是$\sigma$可加的。由定理2.7，$P$可唯一地延拓为$(\mathop{\times}\limits_{t\in T}\Omega_t,\ \mathop{\times}\limits_{t\in T}\mathscr{F}_t)$上的概率测度。#

小　结

本章是在可测空间引进测度后再介绍各种概率论基本概念的。§1，§2的中心是介绍可测空间上测度的生成和延拓。§1在引进测度的定义和基本性质后，就给出了较为容易处理的半域到域的测度扩张和σ域上测度完备化扩张，而把较复杂的测度从域到σ域的扩张留在§2中去处理。由于验证集函数的可列可加性有时也不容易，命题2.10给出了保证P可列可加的一个充分条件。§2中关于分布函数及其生成测度的讨论既是前面一般性结论的一种应用，又是概率论中建立概率模型的最基本情况。§3给出积分的定义和性质，它也是概率论中期望的定义和性质。定理3.15给出了一般初等概率论教材中不同方式规定期望的一致性。§4在有概率测度的前提下讨论随机变量的种种收敛的性质和关系，包括依概率收敛，a.s.收敛，L^p收敛。一致可积性是在讨论r.v.序列收敛性中一个十分有用的概念。§5讨论乘积空间上规定测度的问题。前一半讨论有限维情况，定理5.3是一般的情况，其最重要的特

例是 Fubini 定理(定理 5.6)；后一半涉及到无限维情况，系 5.17 和定理 5.18 是两个重要的结果，前者即 Колмогоров 定理是随机过程理论中基本定理之一，后者是证明无限维乘积测度空间的存在性。

习　　题

1. 设 μ 为域 $\mathscr{A}$ 上的测度，E，$F\in\mathscr{A}$. 证明：
$$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\cup F)+\mu(EF).$$

2. 若 μ 为域 $\mathscr{A}$ 上的测度，对 E，$F\in\mathscr{A}$，记 $\rho(E,F)=\mu(E\triangle F)$，且当 $E\triangle F$ 为可略集时认为 E 与 F 是等价的，则对等价的集类来说，$\rho(E,F)$ 满足距离公理。进而，若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为完备概率空间，则等价集类全体按上述距离是一个完备距离空间。若 $\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{C})$，$\mathscr{C}$ 为可列的，则这一距离空间还是可分的。

3. 设 μ,ν 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上两个在域 $\mathscr{A}$ 上 σ 有限的测度，$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{A})$. 证明：对任一 $E\in\mathscr{F}$，若 $\mu(E)$，$\nu(E)$ 有限，则对任一 $\varepsilon>0$，必有 $F_\varepsilon\in\mathscr{A}$，使
$$\mu(E\triangle F_\varepsilon)<\varepsilon,\quad \nu(E\triangle F_\varepsilon)<\varepsilon.$$
并以例子说明"μ,ν 在 $\mathscr{A}$ 上 σ 有限"不能减弱为"μ，ν 在 $\mathscr{F}$ 上 σ 有限"。

4. 若 $\{\mu_n\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的递增测度序列，即对每个 $A\in\mathscr{F}$，$\mu_n(A)\leq\mu_{n+1}(A)$. 令 $\mu(A)=\lim\limits_n\mu_n(A)$，证明 μ 也是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的测度.

5. 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 为测度空间，正测度集 $E\in\mathscr{F}$ 称为是 μ 原子，若 $F\subset E$，$F\in\mathscr{F}$，则必有 $\mu(F)=0$ 或 $\mu(E-F)=0$. 证明：若 μ 为 σ 有限测度，则 $\mathscr{F}$ 中原子集不计可略集的差别至多为可列个.

6. $(R,\mathscr{B})$ 上测度 μ 为由右连续不减函数 F 生成的 $L-S$ 测度，则 A 为 μ 原子集的充要条件是 $A\in\{\{x\}\cup N: F(x)-F(x-)>0,\ N$ 为 μ 可略集$\}$.

7. 若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为无原子概率空间，则 i) 对每个 $\varepsilon>0$，必存在 $A\in\mathscr{F}$，使 $0<P(A)<\varepsilon$；ii) 对每个 $a\in[0,1]$ 至少有一个 $A\in\mathscr{F}$，使 $P(A)=a$.

8. 若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，则对每个 $\varepsilon>0$，存在 Ω 的有限分割
$$\Omega=\sum_{i=1}^{n}A_i,\ A_i\in\mathscr{F},$$
使每个 A_i 或者为原子集且 $P(A_i)\geq\varepsilon$，或者 $P(A_i)\leq\varepsilon$.

9. 若 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{P})$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的完备化，则对 $(\Omega,\overline{\mathscr{F}},\overline{P})$ 上任一个 r.v. $\overline{X}$，存在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 r.v. X，使 $\overline{P}(X\neq\overline{X})=0$.

10. 设 $(E_i,\mathscr{E}_i)$ 为可测空间 $(i=1,2)$. $\mathscr{E}_i^\mu$ 表示 $\mathscr{E}_i$ 关于概率测度 μ 的完备化. $\mathscr{E}_i^*=\bigcap\limits_\mu\mathscr{E}_i^\mu(i=1,2)$，这里 μ 取遍 $\mathscr{E}_i$ 上一切概率测度. 证明：若

$f\in \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$，则 $f\in \mathscr{E}_1^*/\mathscr{E}_2^*$.

11．设 $\Omega=\{]0,1]$中有理数全体$\}$，$\mathscr{S}=\{\Omega\cap]a,b]:a,b$为有理数$\}$，$\mathscr{A}=\mathscr{A}(\mathscr{S})$.
i) 证明 $\mathscr{F}\triangleq\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{P}(\Omega)$；ii) $A\in\mathscr{F}$，$\mu_1(A)$ 表示 A 的点数，$\mu_2(A)=2\mu_1(A)$，验证 $\mu_1=\mu_2|\mathscr{A}$，但 $\mu_1\neq\mu_2$.

12．(按 §2 的记号)若 $E,F\in\mathscr{P}(\Omega)$，且至少有一个属于 $\mathscr{G}$，则

$$\mu^*(E)+\mu^*(F)=\mu^*(E\cup F)+\mu^*(EF).$$

13．设 Ω 为完备可分距离空间，$\mathscr{B}$为 Borel σ 域，P 为 $\mathscr{B}$ 上概率测度．试证：对任一 $\varepsilon>0$，必存在紧集 K_ε，使 $P(K_\varepsilon)>1-\varepsilon$.

14．设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，又 $\Omega_1\subset\Omega$，$P^*(\Omega_1)=1$．取

$$\mathscr{F}^*=\{\Omega_1B:B\in\mathscr{F}\},\quad \overline{P}(\Omega_1B)=P(B),\quad B\in\mathscr{F}.$$

证明：$\overline{P}$ 在 $\mathscr{F}^*$ 上是完全确定的，且$(\Omega_1,\mathscr{F}^*,\overline{P})$ 为概率空间.

15．设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\mathscr{C}=\{F_\alpha:\alpha\in I\}$ 满足 $P^*(F_\alpha)=1$，$\alpha\in I$，且对任一列 $\{F_{\alpha_n}\}$ 必有 $\bigcap_n F_{\alpha_n}\in\mathscr{C}$．试证：在 $\sigma(\mathscr{F},\mathscr{C})$ 上必有概率测度 P'，满足 $P'|\mathscr{F}=P$，$P'|\mathscr{C}=1$.

16．设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{A})$，$\mathscr{A}$ 为域．证明：若不计可略集的差别，$\mathscr{A}_{\sigma\delta}$ 与 $\mathscr{A}_{\delta\sigma}$ 分别与 $\mathscr{F}$ 是一致的.

17．设 $\Omega=\{]0,1]$ 中有理数全体$\}$，$\mathscr{S}=\{\Omega]a,b]:a,b$ 为有理数$\}$，且当 $0<a\leq b<1$ 时，规定 $\mu(\Omega]a,b])=b-a$．证明：$\mathscr{S}$ 是一个半域，μ为 $\mathscr{S}$ 上的可加集函数，且当 $A_n\downarrow\varnothing$ 时有 $\mu(A_n)\downarrow 0$，但 μ 在$\mathscr{S}$上不是 σ 可加的.

18．对 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上 r.v. X,Y，令

$$\rho(X,Y)=\mathrm{E}\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}.$$

证明：将 ρ 看为 r.v. 等价类的函数时，它是满足距离要求的，且在此距离下收敛概念与依概率收敛是一致的.

19．证明：对概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的任一 r.v. 序列 $\{X_n\}$，a.s. 收敛与依概率收敛等价的充要条件是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为纯原子的(即 Ω 与原子集之并差一可略集).

20．在非纯原子的概率空间上，证明：i)在 r.v. 之间无法引入距离，使按此距离的收敛概念与 a.s. 收敛等价.
ii) 有限r.v.全体构成的空间无法赋范，使在此范数下收敛与依概率收敛是等价的.

21．设 $E\in\mathscr{B}^1$，Borel 函数f在 E 上连续，$P(X\in E)=1$．证明：i)若 $X_n\to X$ a.s.，则 $f(X_n)\to f(X)$ a.s.；ii) 若 $X_n\xrightarrow{P}X$，则 $f(X_n)\xrightarrow{P}f(X)$.

22. 对 r.v. 序列 $\{X_n\}$，证明：$X_n \xrightarrow{P} X$ 的充要条件是 $\{X_n\}$ 的任一子列 $\{X_{n'}\}$，必有子列的子列 $\{X_{n''}\}$ 使 $X_{n''} \to X$ a.s..

23. 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为有界 r.v. 序列，证明：在 r.v. 等价类间存在满足下列条件的最小(最大)等价类 $Y'(Y'')$，使对任一 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq Y' + \varepsilon) = 0 \quad (\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq Y'' - \varepsilon) = 0)$$

且 $Y'' \leq Y'$ a.s.. 同时，$Y' = Y''$ 且 a.s. 有限的充要条件是 $\{X_n\}$ 依概率收敛。

24. 设 $\{X_n\}$ 为任意有限 r.v. 序列.证明：必存在正数列 $\{C_n, n \geq 1\}$ 使 $\sum\limits_{n\geq 1} c_n X_n$ a.s. 收敛于有限 r.v..

25. 设 X, Y 为两个正可积 r.v.，$Z = \max(X, Y)$. 证明：对每个 $a \geq 0$

$$\mathbf{E}[ZI_{(Z\geq a)}] \leq \mathbf{E}[XI_{(X\geq a)}] + \mathbf{E}[YI_{(Y\geq a)}],$$

并由此推出，若 $\{X_n, n \geq 1\}$ 一致可积，则

$$\mathbf{E}\left[\frac{1}{n} \sup_{1\leq m\leq n} |X_m|\right] \to 0.$$

26. 设 $\mathscr{H}$ 是一致可积族，证明 $\mathscr{H}$ 在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 中的凸闭包也是一致可积的.

27. 证明随机变量族 $\{X_i, i \in I\}$ 为一致可积族的充要条件是存在 $[0, \infty[$ 上非负可测函数 f 满足

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} f(x) = +\infty, \quad 且 \sup_{i\in I} \mathbf{E}[f(X_i)] < \infty.$$

特别地，若 $\sup\limits_{i\in I} \mathbf{E}|X_i|^p < \infty \ (p > 1)$ 或 $\sup\limits_{i\in I} \mathbf{E}[|X_i| \log^+ |X_i|] < \infty$，则 $\{X_i, i \in I\}$ 为一致可积的.

28. 若非负可积 r.v. 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 满足 $X_n \xrightarrow{P} X$，$\mathbf{E}X_n \to \mathbf{E}X < \infty$ 则 $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

29. 若 $\{X_n, n \geq 1\} \subset L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$，$X_n \xrightarrow{P} X$，$\mathbf{E}|X_n|^p \to \mathbf{E}|X|^p < \infty$，则 $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

30. 设 $\{X_n, n \geq 1, X\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上可积 r.v. 序列. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP$$

对 $A \in \mathscr{F}$ 一致成立的充要条件是 $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

31. 对 r.v. 序列 $\{X_n, n \geq 1\}$，试问：i) 存在正数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$，使

$$\sum_n P(|X_{n+1}-X_n|>\varepsilon_n)<\infty$$

是不是 $\{X_n,n\geq 1\}$ a.s. 收敛的充分条件?

ii) 对任一正数 $\varepsilon>0$,

$$\sum_n P(|X_n-Y|>\varepsilon)<\infty$$

是不是 $\{X_n,n\geq 1\}$ a.s. 收敛于 Y 的充分条件?

32. 若 $\{X_n,n\geq 1\}$ a.s. 收敛于有限 r.v., 则对任一 $\varepsilon>0$, 必存在正数 $M(\varepsilon)$ 使

$$P(\sup_n|X_n|\leq M(\varepsilon))>1-\varepsilon.$$

33. 证明：对任一 r.v. 序列 $\{X_n,n\geq 1\}$, 必存在常数序列 A_n 使

$$X_n/A_n\to 0 \text{ a.s.}.$$

34. 证明：若对任意的有理数 $a<b$,

$$P(\{X_n<a \text{ i.o.}\}\{X_n>b \text{ i.o.}\})=0,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ a.s. 存在(可以是无限的).

35. 设 $\{X,X_n,n\geq 1\}$ 为 r.v. 序列,若 $\sum \mathsf{E}|X-X_n|^p<\infty$, $p>0$, 则 $X_n\to X$ a.s.

36. 若 $\{X_n,n\geq 1\}$ 为一致可积的, 证明:

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n)\leq\varliminf_n\mathsf{E}(X_n),\quad \mathsf{E}(\varlimsup_n X_n)\geq\varlimsup_n\mathsf{E}(X_n).$$

37. 若 $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ 均为可积 r.v. 序列, 且 $P(X_n\geq Y_n\geq 0)=1$, 又 $X_n\xrightarrow{P}X$, $Y_n\xrightarrow{P}Y$, $\mathsf{E}X_n\to\mathsf{E}X<\infty$, 则 $\mathsf{E}|Y_n-Y|\to 0$。

38. 若 $\overline{\mathscr{B}}$, $\overline{\mathscr{B}\times\mathscr{B}}$ 分别表示直线上和平面上 Borel 域按 Lebesgue 测度的完备化, 说明 $\overline{\mathscr{B}}\times\overline{\mathscr{B}}\neq\overline{\mathscr{B}\times\mathscr{B}}$.

39. 当 X 为只取非负整数的 r.v. 时, 证明:

$$\mathsf{E}X=\sum_{n=1}^{\infty}P(X\geq n).$$

40. 设 X 为 r.v., p 为正整数。证明下列条件等价

i) $\mathsf{E}|X|^p<\infty$, ii) $\displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}P(|X|>x)dx$,

$$\text{iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}n^{p-1}P(|X|\geq n)<\infty,$$

且这时有

$$\mathsf{E}X^p=p\int_0^\infty t^{p-1}[P(X\geq t)+(-1)^pP(X\leq -t)]dt.$$

41. 设 $p>0$,若 $\mathbf{E}|X|^p<\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} x^p P(|X|>x)=0$。反之, 若

$$\lim_{x\to\infty} x^p P(|X|>x)=0,$$

则对任一 $\varepsilon>0$ 且 $\varepsilon<P$, 有 $\mathbf{E}|X|^{p-\varepsilon}<\infty$。

42. 若 $F(x)$ 为 r.v. X 的分布函数, 又 $\alpha,\beta>0$, 则

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha+\beta} P(|X|>x)=0$$

的充要条件是

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} \int\limits_{|y|\geq x} y^{\beta} dF(y)=0$$

则这时必有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^c} \int_{-x}^{x} y^{\alpha+\beta-c} dF(y)=0,\ c>0。$$

43 证明: 对 $p>0$, $\mathbf{E}|X+Y|^p\leq C_p(\mathbf{E}|X|^p+\mathbf{E}|Y|^p)$, 其中

$$C_p=\max(2^{p-1},1)。$$

44. 若 X 为非负 r.v., $F(x)$ 为 X 的分布函数, 又

$$Y=\min(X,s),\quad Z=XI_{X<s}\quad s>0,$$

则对 $r>0$ 有

$$\mathbf{E}Y^r=r\int_0^s t^{r-1}(1-F(t))dt,$$

$$\mathbf{E}Z^r=\int_0^s t^r dF(t)。$$

45. 设 r.v. X,Y 满足

$$P(|X|\geq x)\leq cP(|Y|\geq x),\ x\geq 0$$

证明: $\mathbf{E}(|X|\wedge a)^p\leq c\mathbf{E}(|Y|\wedge a)^p$, $p>0$, $a>0$.

46. 对非负 r.v. X 及 $r>1$, 证明: $\int_0^{\infty} \frac{1}{u^r} \mathbf{E}(X\wedge u^r)du=\frac{r}{r-1}\mathbf{E}(X^{1/r})$。

47. 设 $Y=X\wedge c$, 证明:

$$\operatorname{var} Y\leq \operatorname{var} X。$$

48. 对任一 r.v. 序列 $\{X_n, n\geq 1\}$, $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ 及 $p\geq 1$, 证明:

i) 若 $X_n\to 0$ a.s., 则 $\frac{S_n}{n}\to 0$ a.s.。

ii) 若 $X_n\to 0$ L^p, 则 $\frac{S_n}{n}\to 0$ L^p。

iii) 由 $X_n\xrightarrow{P}0$ 不能推出 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}0$。

第三章　独立随机变量序列

§1　独立性与零壹律

一、独立性

以下我们都在固定的完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上讨论问题，T为某个参数集.

1　定义　事件族 $\{A_t, t\in T\}$ 称为(关于 P) **独立的**，若对 T 的任一有限子集 $I\subset T$,

$$P(\bigcap_{t\in I} A_t)=\prod_{t\in I}P(A_t).$$

$\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为$\mathscr{F}$的子类族，若对 T 的任一有限子集 $I\subset T$ 及任一$A_t\in\mathscr{C}_t, t\in T$, 满足

$$P(\bigcap_{t\in I} A_t)=\prod_{t\in I}P(A_t),$$

则称 $\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为(关于 P) **独立子类族**. 特别地当 $\mathscr{C}_t$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ域时，$\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$称为(关于 P) **独立的 σ 域族**.

2　命题　设 $\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子类族. 若对每个$t\in T$, $\mathscr{C}_t$ 为π类，且 $\{\mathscr{C}_t, t\in T\}$ 为独立族，则 i) $\{\mathscr{B}_t=\sigma(\mathscr{C}_t), t\in T\}$为独立族；ii)若$\overline{\mathscr{B}}_t$表示$\mathscr{B}_t$ 的完备化 σ 域，则$\{\overline{\mathscr{B}}_t, t\in T\}$ 为独立族.

证　i)　只需证T为有限的情形. 对$t_0\in T$, 记

$$\mathscr{D}=\{D: P(D\bigcap_{t\neq t_0} C_t)=P(D)\prod_{t\neq t_0}P(C_t),\ D\in\mathscr{B}_{t_0},\ C_t\in\mathscr{C}_t,\ t\in T\}$$

则 $\mathscr{D}$ 包含 π 类 $\mathscr{C}_{t_0}$, 且 $\mathscr{D}$ 本身为 λ 类，故由定理 1.2.9, $\mathscr{D}=\sigma(\mathscr{C}_{t_0})=\mathscr{B}_{t_0}$. 这时子类族$\{\mathscr{B}_{t_0}, \mathscr{C}_t, t\neq t_0\}$具有命题假定的条件，因而用类似上面的论证可得$\{\mathscr{B}_{t_0}, \mathscr{B}_{t_1}, \mathscr{C}_t, t\neq t_0, t_1\}$ 为独立族. 经有限步重复这一过程可得i)为真. 利用定理 2.1.11及$\overline{\mathscr{B}}_t$的构成法容易推得 ii) 也是

成立的.

3 系 若子σ域族$\{\mathscr{B}_t, t\in T\}$为独立族，$\{T_\alpha, \alpha\in J\}$为$T$的互不相交子集，则$\{\mathscr{B}_{T\alpha}=\sigma(\mathscr{B}_t, t\in T_\alpha), \alpha\in J\}$为独立族.

证 取$\mathscr{C}_{T\alpha}=\{\bigcap\limits_{t\in I} B_t: B_t\in\mathscr{B}_t, I$为$T_\alpha$的有限子集$\}$，则$\{\mathscr{C}_{T\alpha}, \alpha\in J\}$满足命题2要求，且因$\beta_{T\alpha}=\sigma(\mathscr{C}_{T\alpha})$，故系成立. #

4 定义 随机变量族$\{X_t, t\in T\}$称为(关于P)是**独立的**，若$\{\sigma(X_t), t\in T\}$是独立的子σ域族.

5 命题 r.v. 族$\{X_t, t\in T\}$为独立族的充要条件是对一切实数(有理数)a_t，及T的任一有限子集I，有

$$P(\bigcap_{t\in I}(X_t\leqslant a_t))=\prod_{t\in I}P(X_t\leqslant a_t), \tag{4.1}$$

证 必要性是显然的. 为证充分性，只需取$\mathscr{C}_t=\{(X_t\leqslant a_t): a_t$为实数(或有理数)$\}$，并用命题2即可. #

6 命题 设$\{X_t, t\in T\}$为独立 r.v. 族，$\{T_\alpha, \alpha\in J\}$为$T$的互不相交的子集. $\{f_\alpha(x_t, t\in T_\alpha), \alpha\in J\}$为Borel函数族，则$\{Y_\alpha=f_\alpha(X_t, t\in T_\alpha), \alpha\in J\}$为独立 r.v. 族.

证 由于$\sigma(Y_\alpha)\supset\sigma(X_t, t\in T_\alpha)$，故由系3即得命题结论.

7 命题 设$\{X_t, t\in T\}$为独立 r.v. 族，且对每个$t\in T$，$f_t(X_t)$可积(非负)，则对T的任一有限子集I，有

$$\mathsf{E}[\prod_{t\in I}f_t(X_t)]=\prod_{t\in I}\mathsf{E}[f_t(X_t)]. \tag{7.1}$$

证 不妨设T为有限的，取$t_0\in T$，记$\mathscr{L}=\{f: f(X_{t_0})$可积$\}$，

$$\mathscr{H}=\{f: \mathsf{E}[f(X_{t_0})\prod_{t\neq t_0}I_{A_t}]=\mathsf{E}[f(X_{t_0})]\prod_{t\neq t_0}\mathsf{E}(I_{A_t}),\ A_t\in\sigma(X_t)$$

$$f \text{ 为 Borel 可测函数}\},$$

则$\mathscr{H}\supset\{I_B: B$为 Borel 集$\}$且$\mathscr{H}$为$\lambda$类，所以由单调类定理1.4.19对一切可积$f(X_{t_0})$知，

$$\mathsf{E}[f(X_{t_0})\prod_{t\neq t_0}I_{A_t}]=\mathsf{E}[f(X_{t_0})]\prod_{t\neq t_0}\mathsf{E}(I_{A_t}).$$

类似于命题2的证明，对$t\in T$依次逐个地运用上面的做法，可知(7.1)成立.

8 系 设$\{X_t, t\in T\}$为独立可积(非负) r.v. 族，则对T的任一有限子集I，有

$$\mathsf{E}[\prod_{t\in I}X_t]=\prod_{t\in I}\mathsf{E}[X_t].$$

二、零壹律

9 定义 若$X=\{X_n, n\geqslant 1\}$为 r.v. 序列，记

$$\mathscr{B}^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_k,\ k\geqslant n),$$

则$\mathscr{B}^*$称为关于X的尾σ域或尾事件域.

10 定理 (Колмогоров 0—1律) 若$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立 r.v. 序列，则其尾事件域$\mathscr{B}^*$中任一事件的概率必为0或1.

证 对每个$n\geqslant 1$，由于$\mathscr{B}^*\subset\sigma(X_k,\ k\geqslant n+1)$，故$\mathscr{B}^*$与$\sigma(X_k,\ k\leqslant n)$独立，因而$\mathscr{B}^*$与$\mathscr{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma(X_k,\ k\leqslant n)$独立. $\mathscr{A}$是一个域，也是一个π类，故由命题2，$\mathscr{B}^*$与$\sigma(\mathscr{A})$独立. 另一方面，$\sigma(\mathscr{A})=\sigma(X_k, k\leqslant 1)\supset\mathscr{B}^*$，所以$\mathscr{B}^*$与自身独立. 因此对任一$A\in\mathscr{B}^*$，必有

$$P(A)=P(AA)=(P(A))^2,$$

所以$P(A)=0$或1. #

11 系 若$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立 r.v. 序列，$\mathscr{B}^*$为其尾事件域，则$\mathscr{B}^*$可测 r.v. Y必为退化的，即Y a.s. 取常数值.

证 对每个$c\in\mathbf{R}$，$(Y\leqslant c)\in\mathscr{B}^*$，故$P(Y\leqslant c)=0$或1. 取

$$c_0=\inf\{c: P(Y\leqslant c)=1\},$$

则

$$P(Y\leqslant c)=\begin{cases}0, & 当\ c<c_0;\\ 1, & \quad c>c_0,\end{cases}$$

故不论c_0有限或无限，都有$P(Y=c_0)=1$.

12 系 若$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立 r.v. 序列，则 i) $\overline{\lim_n}X_n$, $\underline{\lim_n}X_n$为退化的.

ii) $\{\omega:\lim_n X_n$ 存在$\}$, $\{\omega:\sum_n X_n$ 收敛$\}$,

$$\left\{\omega:\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j=0\right\}$$

诸事件的概率为 0 或 1.

13 定理 (Borel-Cantelli 引理) i) 若事件序列 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$, 则 $P(A_n,\ \text{i.o.})=0$.

ii) 若独立事件序列 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=+\infty$, 则

$$P(A_n\ \ \text{i.o.})=1.$$

证 i) $P(\overline{\lim_n} A_n)=\lim_n P(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k)\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)=0$.

ii) $P(\underline{\lim}_n A_n^c)=\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c)$. 利用 $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ 的独立性, 有

$$P(\bigcap_{k=n}^{m}A_k^c)=\prod_{k=n}^{m}P(A_k^c)=\prod_{k=n}^{m}(1-P(A_k))$$

$$\leqslant\prod_{k=n}^{m}\exp(-P(A_k))=\exp(-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)).$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\infty$, 所以当 $m\to\infty$ 时上式右端趋于零, 故

$$P(\underline{\lim}_n A_n^c)=\lim_{n\to\infty}P(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}P(\bigcap_{k=n}^{m}A_k^c)=0,$$

$$P(\overline{\lim_n} A_n)=1-P(\underline{\lim}_n A_n^c)=1. \ \#$$

14 例 设 $\{X_i,\ i\geqslant 1\}$ 为相互独立同分布 r.v. 序列, 且 X_i 都是 $N(0,1)$ 分布的. 下面我们用 Borel-Cantelli 引理证明:

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}=1\right)=1 \tag{14.1}$$

首先, 对任一 $a>1$,

$$P(X_n>a\sqrt{2\log n})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a\sqrt{2\log n}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\leqslant\frac{1}{a\sqrt{2\log n\cdot 2\pi}}\exp\left(-\frac{(a\sqrt{2\log n})^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi\log n}}n^{-a}$$

所以 $\sum_n P(X_n>a\sqrt{2\log n})<\infty$，由定理 13

$$P\left(\left\{\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}>a\right\}\quad \text{i.o.}\right)=0.$$

由于 a 为任一大于 1 的数，故

$$P\left(\overline{\lim_n}\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}\leqslant 1\right)=1 \tag{14.2}$$

另一方面，对任一 $0<a<1$，当 n 足够大后，有

$$P\left(X_n>a\sqrt{2\log n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a\sqrt{2\log n}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{a\sqrt{2\log n}}-\left(\frac{1}{a\sqrt{2\log n}}\right)^3\right)$$

$$\exp\left(-\frac{(a\sqrt{2\log n})^2}{2}\right)\geqslant\frac{1}{3a\sqrt{\pi\log n}}n^{-a^2}$$

所以 $\sum_n P(X_n>a\sqrt{2\log n})=\infty$. 由定理 13,

$$P\left(\overline{\lim_n}\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}\geqslant a\right)=1. \tag{14.3}$$

由于 a 是任一小于 1 的正数，联合 (14.2) (14.3) 即得 (14.1). #

§2 独立项级数

1 定义 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 r.v. 序列，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 当 $\{S_n\}$ a.s. (或依概率)收敛于有限 r.v. S，则称 r.v. 级数 $\sum_{j=1}^{\infty}X_j$为 a.s.(或依概率)收敛.

由命题 2.4.7，$\sum_{j=1}^{\infty}X_j$ a.s. 收敛的充要条件是对任一 $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{l,k\geq n} |S_l - S_k| \geq \varepsilon) = 0. \tag{1.1}$$

2 命题（Колмогоров 不等式） 若 $\{X_n, n\geq 1\}$ 为独立 r.v. 序列，且 $\mathrm{E}X_n=0$，$\mathrm{E}X_n^2<\infty$. 记 $S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$，则对任一 $\varepsilon>0$，有

$$P(\max_{1\leq j\leq n}|S_j|\geq\varepsilon)\leq \mathrm{E}S_n^2/\varepsilon^2. \tag{2.1}$$

证 固定 $\varepsilon>0$，令

$$T(\omega)=\min\{j: |S_j(\omega)|\geq\varepsilon\},$$

则

$$\Lambda_k=\{\omega: T(\omega)=k\}=\{\omega: \max_{1\leq j\leq k-1}|S_j(\omega)|<\varepsilon, |S_k(\omega)|\geq\varepsilon\}$$

$$\in\sigma(X_1, \cdots, X_k).$$

其中 $\max_{1\leq j\leq 0}|S_j(\omega)|$ 约定为 0，故 Λ_k 与 $\sigma(X_n, n\geq k+1)$ 独立. 注意到 $\Lambda \triangleq \{\omega: \max_{1\leq j\leq n}|S_j(\omega)|\geq\varepsilon\}=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k$，故

$$\mathrm{E}S_n^2\geq\int_\Lambda S_n^2\,\mathrm{d}P=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Lambda_k} S_n^2\,\mathrm{d}P=\sum_{k=1}^{n}\int_{\Lambda_k}[S_k+(S_n-S_k)]^2\mathrm{d}P$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int[S_k^2+2S_k(S_n-S_k)+(S_n-S_k)^2]I_{\Lambda_k}\,\mathrm{d}P.$$

利用 $I_{\Lambda_k}S_k\in\sigma(X_1,\cdots,X_k)$ 与 $S_n-S_k=\sum_{j=k+1}^{n}X_j$ 独立可得

$$\int_{\Lambda_k} S_k(S_n-S_k)\mathrm{d}P=\mathrm{E}(I_{\Lambda_k}S_k)\mathrm{E}(S_n-S_k)=0,$$

并注意在 Λ_k 上 $|S_k|\geq\varepsilon$，故有

$$\mathrm{E}S_n^2\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{\Lambda_k}[S_k^2+(S_n-S_k)^2]\mathrm{d}P$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\int_{\Lambda_k}S_k^2 dP\geq\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}P(\Lambda_k)=\varepsilon^2 P(\Lambda), \tag{2.1}$$

由此得到(2.1). #

3 定理 设 $\{Y_n, n\geq 1\}$ 为独立 r.v. 序列，$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{var}(Y_n)<\infty$，则

$$\sum_n (Y_n - \mathrm{E}Y_n) \qquad \text{a.s. 收敛}$$

证　记 $X_n = Y_n - \mathrm{E}Y_n$，则 $\mathrm{E}X_n = 0$．令 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$，由 (2.1)

$$P(\sup_{1\leqslant k\leqslant m} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=n+1}^{n+m} \mathrm{var}(X_j),$$

故
$$P(\sup_{k\geqslant 1} |S_{n+k} - S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j\geqslant n+1} \mathrm{var}(X_j),$$

$$P(\sup_{k,l\geqslant n} |S_k - S_l| \geqslant 2\varepsilon) \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{j\geqslant n+1} \mathrm{var}(X_j)$$

$$= \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{j\geqslant n+1} \mathrm{var}(Y_j).$$

令 $n\to\infty$，即得

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k,l\geqslant n} |S_k - S_l| \geqslant 2\varepsilon) = 0.$$

所以由命题 2.4.7 可知 $\sum_n (Y_n - \mathrm{E}Y_n)$ a.s. 收敛．#

4　命题　若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列，且

$$|X_n| \leqslant C, \quad \text{a.s.}, \quad \mathrm{E}X_n = 0,$$

记 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$，则

i) 对任一 $\varepsilon > 0$，有

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j| \leqslant \varepsilon) \leqslant \frac{(C+\varepsilon)^2}{ES_n^2}; \tag{4.1}$$

ii) 若 $\sum_{j=1}^{\infty} X_j$ a.s. 收敛，则 $\sum_n \mathrm{E}X_n^2 < \infty$.

证　i) 固定 $\varepsilon > 0$，令 $T(\omega) = \inf\{k: |S_k(\omega)| > \varepsilon\}$，则

$$\{T\geqslant k\} = \{|S_j| \leqslant \varepsilon, 1\leqslant j\leqslant k-1\} \in \sigma(X_1, \cdots X_{k-1}),$$

即 T 为 r.v.，且 $\{T\geqslant k\}$ 与 $(X_k, X_{k+1}, \cdots)$ 独立．若记

$$S_{T\wedge n} = \sum_{k=1}^{n} S_k I_{T=k} + S_n I_{T>n},$$

则

$$\left|\sum_{k=1}^{n} X_k I_{k\leqslant T}\right| = |S_{T\wedge n}| \leqslant \begin{cases} |S_{T-1}| + |X_T| \leqslant \varepsilon + C, & \text{当 } T\leqslant n; \\ \varepsilon, & \text{当 } T > n. \end{cases}$$

而 $$\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_kI_{k\le T}\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}(X_k^2I_{k\le T})+2\sum_{j<k}\mathsf{E}X_jI_{j\le T}I_{k\le T}X_k,$$
利用 $j<k$ 时，X_k 与 $X_jI_{j\le T}I_{k\le T}$ 独立，X_k^2 与 $I_{k\le T}$ 独立，可得

$$(C+\varepsilon)^2\geqslant\mathsf{E}\left|\sum_{k=1}^{n}X_kI_{k\le T}\right|^2=\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k^2P(k\leqslant T)$$

$$\geqslant P(T\geqslant n+1)\sum_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k^2.$$

由(4.2)，$\{\max\limits_{1\le j\le n}|S_j|\leqslant\varepsilon\}=\{T\geqslant n+1\}$，故

$$P(\max_{1\le j\le n}|S_j|\leqslant\varepsilon)=P(T\geqslant n+1)\leqslant\frac{(C+\varepsilon)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathsf{E}X_k^2}=\frac{(C+\varepsilon)^2}{\mathsf{E}S_n^2},\qquad(4.3)$$

即(4.1)成立。

ii) 若 $\sum\limits_n X_n$ a.s. 收敛，取 ε 足够大使

$$P(\max_k|S_k|\leqslant\varepsilon)>0.$$

由(4.3)，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}X_j^2\leqslant\frac{(C+\varepsilon)^2}{P(\max\limits_k|S_k|\leqslant\varepsilon)},$$

令 $n\to\infty$，即有 $\sum\limits_j\mathsf{E}X_j^2<\infty$.#

5 定义 对 r.v. 序列 $\{X_n, n\geqslant1\}$ 及 $\{Y_n, n\geqslant1\}$，若

$$\sum_n P(X_n\neq Y_n)<\infty,\qquad(5.1)$$

则称 $\{X_n, n\geqslant1\}$ 与 $\{Y_n, n\geqslant1\}$ 为等价的。

6 命题 若 $\{X_n, n\geqslant1\}$，$\{Y_n, n\geqslant1\}$ 等价，则

$$\sum_n(X_n-Y_n)\quad \text{a.s. 收敛}\qquad 6.1)$$

对数列 $\{a_n\}$，若 $a_n\uparrow\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-Y_j)=0\quad\text{a.s.}\qquad(6.2)$$

证 由 Borel-Cantelli 引理，从(5.1)可推出 $P(X_n\neq Y_n\ \text{i.o.})=0$. 故存在可略集 N，对 $\omega\in N^c$ 存在 $K(\omega)$，当 $k>K(\omega)$ 时

$$X_k(\omega)=Y_k(\omega).$$

故当 $\omega\in N^c$，$\sum_n(X_n-Y_n)$至多有限项不为零．(6.1)，(6.2)易由此推出．*

7 定理 三级数定理 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列，记

$$X_n^{(a)}(\omega)=X_n(\omega)I_{\{|X_n(\omega)|\leqslant a\}},$$

则级数 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛的充要条件是对某一(任一) $a\in]0,\infty[$，下列三个级数同时收敛：

$$\sum_n P(|X_n|>a),\quad \sum_n \mathsf{E}X_n^{(a)},\quad \sum_n \mathrm{var}(X_n^{(a)}).$$

注 在充分性中，只需对某个 $a\in[0,\infty]$成立即可，在必要性中，可对任一 $a\in]0,\infty[$成立．

证 $\Rightarrow$对任一 $a\in]0,\infty[$，记 $A_n=\{|X_n|>a\}$，则 $\{A_n\}$ 为独立事件序列，由 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛，$X_n\to 0$ a.s.，故 $P(A_n \text{ i.o.})=0$．按 Borel-Cantelli 引理，

$$\sum_n P(X_n\neq X_n^{(a)})=\sum_n P(|X_n|>a)=\sum_n P(A_n)<\infty,$$

因而 $\{X_n\}$ 与 $\{X_n^{(a)}\}$ 等价，$\sum X_n^{(a)}$ 亦 a.s. 收敛．考虑独立 r.v. 序列 $\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 它与 $\{X_n^{(a)}, n\geqslant 1\}$ 同分布且相互独立(由定理 2.5.18，这样的 $\{Y_n\}$ 是存在的)．这时 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 收敛，$\sum_n(X_n^{(a)}-Y_n)$亦a.s.收敛，由 $\{X_n^{(a)}\}$ $\{Y_n\}$ 同分布，

$$|X_n^{(a)}-Y_n|\leqslant 2a,\quad \mathsf{E}(X_n^{(a)}-Y_n)=0,$$

$$\mathrm{var}(X_n^{(a)}-Y_n)=2\mathrm{var}(X_n^{(a)}).$$

由命题 4 可知，这时 $\sum_n \mathrm{var}(X_n^{(a)}-Y_n)<\infty$，即 $\sum_n \mathrm{var}(X_n^{(a)})<\infty$．又由定理 3 可推出，$\sum_n(X_n^{(a)}-\mathsf{E}X_n^{(a)})$ a.s. 收敛，故 $\sum_n \mathsf{E}X_n^{(a)}$ 也收敛．

$\Leftarrow$按定理 3，由 $\sum_n \mathrm{var}(X_n^{(a)})<\infty$ 可推出 $\sum_n(X_n^{(a)}-\mathsf{E}X_n^{(a)})$a.s收敛．又由 $\sum_n \mathsf{E}X_n^{(a)}$ 收敛可推出 $\sum_n X_n^{(a)}$ a.s. 收敛．利用

$$\sum_n P(X_n\neq X_n^{(a)})=\sum_n P(|X_n|>a)<\infty$$

及命题 6，可推出 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛．*

8 例 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为相互独立 Poisson 分布 r. v. 序列，

$$P(X_n=k)=\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n},\quad k=0,1,2,\cdots,n\geqslant 1,$$

则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛的充要条件是 $\sum_n \lambda_n<\infty$.

为证充分性，在定理 7 中取 $a=\infty$，则 $X_n^{(a)}=X_n$，

$$\sum_n P(|X_n|>a)=0,$$

$$\sum_n \mathrm{E}X_n^{(a)}=\sum_n \mathrm{E}X_n=\sum_n \lambda_n<\infty,$$

$$\sum_n \operatorname{var} X_n^{(a)}=\sum \operatorname{var} X_n=\sum \lambda_n<\infty,$$

故 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛.

为证必要性，可在定理 7 中取 $a=\frac{1}{2}$，则

$$\sum_n P\left(|X_n|>\frac{1}{2}\right)=\sum_n P(X_n\neq 0)=\sum_n (1-e^{-\lambda_n}).$$

由于上述级数收敛，必有 $\lambda_n\to 0$，故 $\sum_n \lambda_n$ 亦同时收敛.

9 例 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为相互独立 r. v. 序列，$P(X_n=\pm\frac{1}{\sqrt{n}})=\frac{1}{2}$

若取 $a=1$，则 $X_n=X_n^{(a)}$，但 $\sum_n \operatorname{var} X_n^{(a)}=\sum_n \frac{1}{n}=+\infty$，故 $\sum_n X_n$ 不 a.s. 收敛. 由 Колмогоров 0–1 律，$\sum_n X_n$ 必 a.s. 发散.

10 命题 (Ottaviani 不等式) 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r. v. 序列，a，b，c 为正数，且

$$P(|\sum_{j=k+1}^{n} X_j|\leqslant b)\geqslant a,\quad 0\leqslant k\leqslant n-1,$$

则

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=1}^{k} X_j|>b+c)\leqslant \frac{1}{a}P(|\sum_{j=1}^{n} X_j|>c). \tag{10.1}$$

证 记
$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$$\Lambda_k=\{\omega:\max_{1\leqslant j\leqslant k-1}|S_j|\leqslant b+c,\ |S_k|>b+c\},$$

$$C_k=\{\omega:|S_n-S_k|\leqslant b\}=\{\omega:|\sum_{j=k+1}^{n}X_j|\leqslant b\},$$

则 Λ_k 互不相交，且

$$\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k C_k\subset\{|S_n|>c\}.$$

又由于 $\Lambda_k\in\sigma(X_j,j\leqslant k)$，故 Λ_k，C_k 相互独立．因此，

$$P(|S_n|>c)\geqslant\sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k C_k)=\sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k)P(C_k)\geqslant a\sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k)$$

$$=aP(\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k)=aP(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>b+c),$$

由此即得 (10.1)．#

11　定理　若 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 为独立 r.v. 序列，则 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ a.s. 收敛与 $\sum_{n=1}^{\infty}X_n$ 依概率收敛是等价的．

证　由命题 2.4.10，$\sum_n X_n$ a.s. 收敛必依概率收敛．反之，由 $\sum_n X_n$ 依概率收敛，对任一 $\varepsilon>0$ 及 $\delta>0$，必有 N，当 $m,n>N$ 时，

$$P(|\sum_{j=m}^{n}X_j|>\varepsilon)<\delta,\qquad P(|\sum_{j=m}^{n}X_j|\leqslant\varepsilon)>1-\delta.$$

在 (10.1) 中取 $b=c=\varepsilon$，$a=1-\delta$，则有

$$P(\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=N+1}^{N+k}X_j|>2\varepsilon)\leqslant\frac{1}{1-\delta}P(|\sum_{j=N+1}^{N+n}X_j|>\varepsilon)<\frac{\delta}{1-\delta},$$

$$P(\sup_{m,n>N}|\sum_{j=m}^{n}X_j|>4\varepsilon)\leqslant\frac{2\delta}{1-\delta},$$

由 ε，δ 为任意正数可得 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛．#

11　定义　随机变量 X，若对任一实数 x，有

$$P(X\leqslant-x)=P(X\geqslant x),$$

则称 X 具有对称分布．

容易看出，X 具有对称分布，即 X 与 $-X$ 有相同分布．若 $\{X_j,$

$j\geqslant 1\}$ 都有对称分布且相互独立，则 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$ 也有对称分布．若 X 有对称分布，则

$$P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)\geqslant \frac{1}{2}. \tag{11.1}$$

对一般的随机变量 X，若取 Y 与 X 独立且有相同分布，则

$$Z=X-Y$$

有对称分布．

12 命题（Lévy 不等式） 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为相互独立且具有对称分布的 r.v. 序列，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，则对任一 $\varepsilon>0$，

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j\geqslant \varepsilon)\leqslant 2P(S_n\geqslant \varepsilon), \tag{12.1}$$

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant \varepsilon)\leqslant 2P(|S_n|\geqslant \varepsilon). \tag{12.2}$$

证 类似于命题 10，记

$$\Lambda_k=\{\omega: \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} S_j<\varepsilon,\ S_k\geqslant \varepsilon\},$$

$$C_k=\{\omega: S_n-S_k\geqslant 0\},$$

则由 (11.1) 知，$P(C_k)\geqslant \frac{1}{2}$，$\{\Lambda_k, k\geqslant 1\}$ 互不相交且

$$\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k C_k\subset\{S_n\geqslant \varepsilon\}.$$

又由于 $\Lambda_k\in\sigma(X_j, j\leqslant k)$，故 Λ_k 与 C_k 相互独立，

$$P(S_n\geqslant \varepsilon)\geqslant \sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k C_k)=\sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k)P(C_k)\geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(\Lambda_k)$$

$$=\frac{1}{2}P(\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k)=\frac{1}{2}P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} S_j\geqslant \varepsilon),$$

即 (12.1) 成立．又因 $\{-X_j, j\geqslant 1\}$ 也满足定理条件，对 $\{-X_j\}$ 用 (12.1)，有

$$P(\min_{1\leqslant j\leqslant n} S_j\leqslant -\varepsilon)=P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(-S_j)\geqslant \varepsilon)\leqslant 2P(-S_n\geqslant \varepsilon)$$

$$=2P(S_n\leqslant -\varepsilon).$$

将上式与 (12.1) 两端分别相加即得 (12.2)．∗

§3 大数定律

1 定义 设 $X=\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 r.v. 序列. $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 若存在常数序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, 使

$$\frac{S_n}{b_n}-a_n\to 0 \quad \text{a.s. (或依概率)}$$

则称 X 满足强大数(弱大数)定律,也称 S_n a.s. (依概率)稳定的.

2 命题 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$, $\{b_n\}$ 为递增地趋于 $+\infty$ 的序列. 若当 $n\to\infty$ 时, $\sum_{j=1}^{n}P(|X_j|>b_n)=o(1)$ (2.1)

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}(X_jI_{|X_j|\leqslant b_n})=o(1), \tag{2.2}$$

则取 $a_n=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}(X_jI_{|X_j|\leqslant b_n})$ 必有

$$\text{pr-}\lim_{n}\frac{1}{b_n}(S_n-a_n)=o. \tag{2.3}$$

特别地,若 (2.1) (2.2) 及下式成立:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}(X_jI_{|X_j|\leqslant b_n})=o(1),$$

则必有 $\text{pr-}\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=0$.

证 对每个 $n\geqslant 1$ 及 $1\leqslant j\leqslant n$, 令

$$Y_{nj}=X_jI_{|X_j|\leqslant b_n},\quad T_n=\sum_{j=1}^{n}Y_{nj}.$$

由 (2.1), $\sum_{j=1}^{n}P(Y_{nj}\neq X_j)=\sum_{j=1}^{n}P(|X_j|>b_n)=o(1)$, 故

$$P(S_n\neq T_n)\leqslant\sum_{j=1}^{n}P(Y_{nj}\neq X_j)=o(1) \tag{2.4}$$

由 (2.2),

$$\operatorname{var}\left(\frac{T_n}{b_n}\right)=\sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}\left(\frac{Y_{nj}}{b_n}\right)\leqslant\frac{1}{b_n^2}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}(X_jI_{|X_j|\leqslant b_n})=o(1),$$

按Чебышев不等式，

$$\frac{T_n-\mathsf{E}T_n}{b_n}\xrightarrow{p}0,\tag{2.5}$$

而 $\mathsf{E}T_n=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}Y_{nj}=\sum_{j=1}^{n}\mathsf{E}(X_jI_{\{|X_j|<b_n\}})=a_n$，故由 (2.4)，(2.5) 可得 (2.3). #

3 定理 设 $\{X_n, n\geqslant1\}$ 为 i.i.d.（独立同分布）r.v. 序列，则存在常数列 C_n 使

$$\text{pr-}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-C_n\right)=0\tag{3.1}$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}nP(|X_1|>n)=0,\tag{3.2}$$

且这时 C_n 可取为

$$C_n=\mathsf{E}(X_1I_{\{|X_1|<n\}}).\tag{3.3}$$

注 若 $\mathsf{E}|X_1|<\infty$，则因

$$nP(|X_1|>n)\leqslant\mathsf{E}|X_1|I_{\{|X_1|>n\}}=o(1),$$

故 (3.2) 必成立．而

$$|\mathsf{E}X_1-C_n|\leqslant\mathsf{E}|X_1|I_{\{|X_1|>n\}}=o(1),$$

所以这时必有

$$\text{pr-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=\mathsf{E}X_1.$$

证 ⇐若 (3.2) 成立，则以 $F_{|X_1|}$ 表示 $|X_1|$ 的分布函数时，有

$$\frac{1}{n}\mathsf{E}|X_1|^2I_{\{|X_1|<n\}}=\frac{1}{n}\int_0^n y^2dF_{|X_1|}(y)$$

$$\leqslant\frac{2}{n}\int_0^n yP(|X_1|>y)dy=o(1),$$

所以取 $b_n=n$，(2.1)，(2.2) 成立，因而按 (3.3) 取 C_n 时，(3.1) 成立．

⇒设 $\{X_n', n\geqslant1\}$ 是与 $\{X_n, n\geqslant1\}$ 相同分布相互独立的 r.v. 序

列，记

$$X_n^s = X_n - X_n'.$$

$$S_n^s = \sum_{j=1}^{n} X_j^s = \sum_{j=1}^{n} X_j - \sum_{j=1} X_j'$$

则 X_n^s，S_n^s 有对称分布，且由(3.1)可推出

$$\frac{S_n^s}{n} = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - C_n\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j' - C_n\right) \xrightarrow{p} 0.$$

又由 **Lévy** 不等式，对任一 $\varepsilon>0$，有

$$P(\max_{1\le j\le n}|S_j^s|>n\varepsilon)\le 2P(|S_n^s|>n\varepsilon),$$

所以

$$\frac{1}{n}\max_{1\le j\le n}|S_j^s| \xrightarrow{p} 0,$$

$$\frac{1}{n}\max_{1\le j\le n}|X_j^s| \le \frac{2}{n}\max_{1\le j\le n}|S_j^s| \xrightarrow{p} 0.$$

由此，对任一 $\varepsilon>0$.

$$[1-P(|X_1^s|>n\varepsilon)]^n = \prod_{j=1}^{n}[1-P(|X_j^s|>n\varepsilon)]$$

$$= P(\max_{1\le j\le n}|X_j^s|\le n\varepsilon) = P\left(\frac{1}{n}\max_{1\le j\le n}|X_j^s|\le\varepsilon\right)\to 1.$$

故
$$nP(|X_1^s|>n\varepsilon)\to 0.$$

若 m 表示 X_1 的中位数，即

$$p(X_1\le m)\ge\frac{1}{2},\qquad P(X_1\ge m)\ge\frac{1}{2},$$

则因

$$\frac{1}{2}P(X_1-m>n\varepsilon)\le P(X_1'\le m)P(X_1-m>n\varepsilon)$$

$$=P(X_1-m>n\varepsilon,\ m-X_1'\ge 0)\le P(X_1-X_1'>n\varepsilon),$$

故

$$P(X_1-m>n\varepsilon)\le 2P(X_1-X_1'>n\varepsilon).$$

同理

$$P(X_1-m<-n\varepsilon)\leqslant 2P(X_1-X_1'<-n\varepsilon)$$

$$nP(|X_1-m|>n\varepsilon)\leqslant 2nP(|X_1^s|>n\varepsilon)\to 0.$$

所以，由 ε 为任意正数，可进而推出

$$\lim_{n\to\infty} nP(|X_1|>n)=0,$$

即 (3.2) 成立．*

4　系　设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，则

$$\text{pr-}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=a$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} nP(|X_1|>n)=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}X_1I_{|X_1|<n}=a.$$

5　引理（Kronecker）　设 $\{x_k\}$ 为实数列，$\{b_k\}$ 为一递增趋于 $+\infty$ 的正数列，则由 $\sum_j \frac{x_j}{b_j}$ 收敛可推出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}x_j=0.$$

证　令 $b_0=c_0=0$，$C_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{b_j}$，则 $x_n=b_n(C_n-C_{n-1})$．利用 Abel 变换有

$$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}b_j(C_j-C_{j-1})=C_n-\frac{1}{b_n}\sum_{j=0}^{n-1}C_j(b_{j+1}-b_j),$$

由于 $b_{j+1}-b_j\geqslant 0$，$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1}-b_j)=1$，$b_n\uparrow\infty$，故上式右端第二项与 $\{C_j\}$ 有相同的极限，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}x_j=\lim_{n\to\infty}C_n-\lim_{n\to\infty}C_n=0.*$$

6　命题　设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列，$\mathrm{E}X_n=0$，$\sigma_n^2=\mathrm{E}X_n^2<\infty$，记

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j,\qquad s_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2.$$

若 $s_n^2\to\infty$，则对任一 $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{s_n(\log s_n^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}=0 \quad \text{a.s.} \tag{5.1}$$

证　记 $Y_n=\dfrac{X_n}{s_n(\log s_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$，则 $\mathrm{E}Y_n=0$,

$$\operatorname{var}Y_n=\frac{\operatorname{var}X_n}{s_n^2(\log s_n^2)^{1+2\varepsilon}}=\frac{s_n^2-s_{n-1}^2}{s_n^2(\log s_n^2)^{1+2\varepsilon}}$$

$$\leqslant\int_{s_{n-1}^2}^{s_n^2}\frac{dx}{x(\log x)^{1+2\varepsilon}}$$

由积分 $\int^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\log x)^{1+2\varepsilon}}$ 收敛，故 $\sum_n \operatorname{var}(Y_n)<\infty$. 由定理 2.3,

$$\sum_n\frac{X_n}{s_n(\log s_n^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

a.s. 收敛. 再由 Kronecker 引理,即得 (5.1) 成立. #

7　系　设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，$\mathrm{E}X_n=0$, $\mathrm{E}X_n^2<\infty$，则对任一 $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\sum_{j=1}^{n}X_j=0 \quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}}(\log n)^{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\sum_{j=1}^{n}X_j=0 \quad \text{a.s.}.$$

8　定理 (Marcinkiewicz-Zygmund)　设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$为 i.i.d. r.v. 序列，$0<p<2$. 这时存在常数列 $\{C_n\}$，使

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}X_j-C_n\right)=0 \quad \text{a.s.} \tag{8.1}$$

的充要条件是

$$\mathrm{E}|X_1|^p<\infty, \tag{8.2}$$

且这时 C_n 可取为

$$C_n=\begin{cases}0, & 0<p<1;\\ n\mathrm{E}X_1, & 1\leqslant p<2.\end{cases} \tag{8.3}$$

证 $\Leftarrow$ 先记$Y_n=X_nI_{|x_n|<n^{\frac{1}{p}}}$，则由命题 2.5.12（在(12.2) 中令 $\alpha=0>-1$，$\beta=\frac{1}{p}$，$r=0$），

$$\sum_n P(Y_n\neq X_n)=\sum_n P(|X_n|\geqslant n^{\frac{1}{p}})=\sum_n P(|X_1|\geqslant n^{\frac{1}{p}})<\infty. \quad (8.4)$$

也可利用命题 2.5.12 (在 (12.4) 中令

$$\alpha=-\frac{2}{p}<-1,\ \beta=\frac{1}{p},\ r=2),$$

有

$$\sum_n n^{-\frac{2}{p}}\ \mathrm{var}(Y_n)\leqslant\sum_n n^{-\frac{2}{p}}\ \mathsf{E}(X_n^2\ I_{|x_n|<n^{\frac{1}{p}}})$$

$$=\sum_n n^{-\frac{2}{p}}\mathsf{E}(X_1^2I_{|x_1|<n^{\frac{1}{p}}})<\infty$$

因此由定理2.3，$\sum_n n^{-\frac{1}{p}}(Y_n-\mathsf{E}Y_n)$ a.s. 收敛. 利用 (8.4)，可推得

$$\sum_n n^{-\frac{1}{p}}(X_n-\mathsf{E}Y_n)\ \text{a.s. 收敛.} \quad (8.5)$$

若 $0<p<1$，则由命题 2.5.12 (在 (12.4) 中取

$$\alpha=-\frac{1}{p}<-1,\ \beta=\frac{1}{p}\ \ \gamma=1),$$

$$\sum_n n^{-\frac{1}{p}}\ |\mathsf{E}Y_n|\leqslant\sum_n n^{-\frac{1}{p}}\ \mathsf{E}(|X_n|I_{|x_n|<n^{\frac{1}{p}}})$$

$$=\sum_n n^{-\frac{1}{p}}\mathsf{E}(|X_1|I(|X_1|<n^{\frac{1}{p}}))<\infty.$$

联合 (8.5) 可得 $\sum_n n^{-\frac{1}{p}}X_n$ a.s. 收敛，由 Kronecker 引理

$$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{p}}\sum_{j=1}^n X_j=0\quad \text{a.s.},$$

由此取 $C_n=0$ 时，(8.1) 成立.

若 $1<p<2$，则由命题 2.5.12 $\Big($在 (12.2) 中取 $\alpha=-\frac{1}{p}>-1$，$\beta=\frac{1}{p}$，$\gamma=1\Big)$，

$$\sum_n n^{-\frac{1}{p}}\ |\mathsf{E}X_n-\mathsf{E}Y_n|\leqslant\sum_n n^{-\frac{1}{p}}\mathsf{E}(|X_n|I_{[|X_n|\geqslant n^{\frac{1}{p}}]})$$

$$=\sum_n n^{-\frac{1}{p}}(|X_1|I_{[|X_1|<n^{\frac{1}{p}}]})<\infty.$$

故 $\sum_n n^{-\frac{1}{p}}(X_n-\mathsf{E}X_1)$ a.s. 收敛. 由此, 用 Kronecker 引理按 (8.3) 取 C_n 时, (8.1) 成立.

若 $p=1$, 则由 (8.5) 及 Kronecker 引理,有

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathsf{E}Y_j)=0,\quad \text{a.s.};$$

另一方面, $\mathsf{E}Y_n=\mathsf{E}(X_nI_{[|X_n|<n]})=\mathsf{E}(X_1I_{[|X_1|<n]})\to\mathsf{E}X_1$,

$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathsf{E}Y_j-\mathsf{E}X_1)\to 0$. 由此即得 (8.1), C_n 也取为 $n\mathsf{E}X_1$.

⇒若 $\{X'_n,\ n\geqslant 1\}$ 表示与 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 同分布且独立的 r.v. 序列,则 $X^s_n=X_n-X'_n$ 有对称分布,且

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}X'_j-C_n\right)=0\quad \text{a.s.},$$

$$\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}X^s_j-C_n\right)=0\ \text{a.s.}.$$

若记 $S^s_n=\sum_{j=1}^{n}X^s_j$, 则

$$n^{-\frac{1}{p}}X^s_n=n^{-\frac{1}{p}}S^s_n-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{p}}(n-1)^{-\frac{1}{p}}S^s_{n-1}\to 0\quad \text{a.s.}$$

由 Borel-Cautelli 引理,

$$\sum_n P(|X^s_1|>n^{\frac{1}{p}})=\sum_n P(n^{-\frac{1}{p}}|X^s_n|>1)<\infty.$$

故由命题 2.5.12, $\mathsf{E}|X^s_1|^p<\infty$, 因而也有 $\mathsf{E}|X_1|^p<\infty$ (参见习题 3). #

9 **系** (Колмогоров) 设 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\ \text{a.s.}$$

存在有限的充要条件是 $\mathsf{E}|X_1|<\infty$, 且这时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=\mathbf{E}\,X_1 \quad \text{a.s.} \tag{9.1}$$

10 命题 若 $\{F_n(x),n\geqslant 1,F(x)\}$ 为右连续分布函数列，且满足

i) 对每个有理数 r，$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(r)=F(x)$；

ii) 对 F 的每个不连续点 x，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x-)=F(x-),\quad \lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x),$$

则在 $\mathbf{R}^1$ 上 F_n 一致收敛于 F.

证 由 i) 可得对 F 的每个连续点 x 成立

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x). \tag{10.1}$$

又由 ii)，上式对一切 $x\in\mathbf{R}^1$ 成立．对每个正整数 k，令 $x_0^{(k)}=-\infty$，$x_k^{(k)}=+\infty$；对 $0<j<k$，令

$$x_j^{(k)}=\inf\left\{x:F(x)\geqslant\frac{j}{k}\right\},$$

则

$$F(x_j^{(k)}-)\leqslant\frac{j}{k}\leqslant F(x_j^{(k)}).$$

对每个 k，剔除 $\{x_j^{(k)},0\leqslant j\leqslant k\}$ 中相同的元素后所剩各点仍以 $\{x_j^{(k)},j\geqslant 1\}$ 表示，则当 $x_j^{(k)}<x<x_{j+1}^{(k)}$，$0\leqslant j<k$ 时，

$$\begin{aligned}F_n(x_j^{(k)})-F(x_j^{(k)})-\frac{1}{k}&\leqslant F_n(x_j^{(k)})-F(x_{j+1}^{(k)}-)\\&\leqslant F_n(x)-F(x)\leqslant F_n(x_{j+1}^{(k)}-)-F(x_j^{(k)})\\&\leqslant F_n(x_{j+1}^{(k)}-)-F(x_{j+1}^{(k)}-)+\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\sup_x|F_n(x)-F(x)|\leqslant&\max_j|F_n(x_j^{(k)})-F(x_j^{(k)})|\\&+\max_j|F_n(x_j^{(k)})-F(x_j^{(k)}-)|+\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

由 (10.1) 及 ii)，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x|F_n(x)-F(x)|\leqslant\frac{1}{k}.$$

又因 k 为任意正整数，故 F_n 在 $\mathbf{R}^1$ 上一致收敛于 F.

11 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i. i. d. r. v. 序列，$P(X_1\leqslant x)=F(x)$. 对 $\{X_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 以 $\{Y_{nj}, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 表示由 $\{X_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 按大小次序排列得到的 r. v.，即

$$Y_{n1}=\min_{j\leqslant n} X_j,$$

$$Y_{n2}=\max_{j_1\cdots j_{n-1}} \min(X_{j_1},\cdots,X_{j_{n-1}}),$$

$$\cdots\cdots$$

$$Y_{nn}=\max_{j\leqslant n} X_j.$$

又记 $F_n^*(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}I(Y_{nk}\leqslant n<Y_{nk+1})+I(x\geqslant Y_{nn})$. 即把$(X_1,\cdots,X_n)$看为取自分布 F 的子样时，$F_n^*(x)$ 为子样的经验分布函数.

12 **定理**（Гливенко-Cantelli） 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i. i. d. r. v. 序列，F_n^* 按上段规定，则

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x|F_n^*(x)-F(x)|=0 \qquad \text{a. s.}. \tag{12.1}$$

证 对每个 $x\in R'$，令 $Y_j=I_{(X_j\leqslant x)}$，则 $\{Y_j, j\geqslant 1\}$ 为 i. i. d. r. v. 序列. 而

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j=F_n^*(x), \qquad \mathsf{E}Y_1=F(x),$$

故由 (9.1)，存在可略集 $N(x)$，当 $\omega\notin N(x)$ 时下式成立：

$$\lim_{n\to\infty}F_n^*(x)=F(x).$$

记 $N_1=\bigcup_{r\in Q}N(r)$（Q 表有理数全体），N_1 为可略集，且当 $\omega\in N_1^c$ 时，对每个 $r\in Q$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}F_n^*(r)=F(r). \tag{12.2}$$

又对每个 $x\in R'$，令 $Z_j=I_{(X_j<x)}$，则 $\{Z_j, j\geqslant 1\}$ 为 i. i. d. r. v. 序列. 而

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Z_j=F_n^*(x-), \quad \mathsf{E}Z_1=F(x-),$$

亦由 (9.1) 存在可略集 $M(x)$，当 $\omega\notin M(x)$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} F_n^*(x-)=F(x). \qquad (12.3)$$

记 J 为 $F(x)$ 不连续点全体，J 至多为可列集，故 $N_2=\bigcup_{x\in J} M(x)$ 为可略集。当 $\omega\in N_2^c$ 时，对每个 $x\in J$ (12.3)成立，故当 $\omega\in(N_1\cup N_2)^c$ 时，由命题 11，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_x |F_n^*(x)-F(x)|=0,$$

即 (12.1) 成立. *

§4 停时与 Wald 等式

一、停时与适应随机变量序列

1 定义 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为完备概率空间，$N=\{0,1,2,\cdots\}$ 代表非负整数全体. 若 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域族 $\boldsymbol{F}=\{\mathscr{F}_n, n\in N\}$ 满足

i) $\mathscr{F}_0$ 包含一切 $\mathscr{F}$ 中的可略集；

ii) 对每个 $n\in N$，$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}\subset\mathscr{F}$，

则称 $\boldsymbol{F}$ 为 σ 域流(Filtration). $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F},P)$ 常称为带流概率空间。

直观上，$\mathscr{F}_n$ 表示到 n 为止的已知信息或事件域. 若取 $\mathscr{F}_n=\mathscr{F}$ 或 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_j,j\leqslant n)\vee N$ (N 表 $\mathscr{F}$ 中可略集全体，$\vee$表示生成 σ 域)都能满足流的要求. 后者又称为 $\{X_n, n\in N\}$ 的自然流，还常取

$$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_n \mathscr{F}_n\triangleq\sigma(\mathscr{F}_n, n\in N).$$

以下我们都在固定的带流概率空间上讨论问题.

2 定义 设 $(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{F},P)$ 为带流概率空间，r. v. 序列 $\{X_n, n\geqslant 1$ (或$n\in N$)$\}$ 称为适应的，若对每个 $n\geqslant 1$ (或$n\in N$)，$X_n\in\mathscr{F}_n$ 又设 $X=\{X_n, n\geqslant 1\}$ 是一般概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 r. v. 序列，若取 $\boldsymbol{F}$ 为 X 的自然流，则 X 必为适应的，且 $\boldsymbol{F}$ 是使 X 适应的最小 σ 域流.

3 定义 设 $(\Omega, \mathscr{F}, \boldsymbol{F}, P)$ 为带流概率空间，只取非负整值的 r. v.（可取 $+\infty$）$T(\omega)$ 称为停时，若对每个 $n\in N$，

$$\{\omega: T(\omega)\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n,$$

或等价地 $\{\omega: T(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n$。停时的全体记为 $\mathscr{T}$.

若 $k\in N$，$T(\omega)\equiv k$ 也是一个停时.

4 命题 设 B 为 $\mathbf{R}^1$ 上任一 Borel 集，$X=\{X_n: n\in N\}$ 为适应 r. v. 序列，则

i) $T_B(\omega)=\inf\{n: X_n(\omega)\in B\}$ 为停时，T_B 又称为初遇；

ii) 若 T 为停时，则

$$S(\omega)=\inf\{n: n>T(\omega),\ X_n(\omega)\in B\}$$

也是停时.

证 i) $\{T_B=n\}=\bigcap\limits_{m<n}(X_m\in B^c)\cap(X_n\in B)\in\mathscr{F}_n$.

ii) $\{S=n\}=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}\Big[(T=k)\bigcap\limits_{m=k+1}^{n-1}(X_m\in B^c)\cap(\in X_n\in B)\Big]\in\mathscr{F}_n$.

由这一命题可看出，命题 2.2 及 2.4 证明过程中引进的 $T(\omega)$ 都是停时.

5 例 设 $X=\{X_n,\ n\geqslant1\}$ 为 i. i. d. r. v. 序列，且 $P(X_n=1)=p$，$P(X_n=0)=1-p$. 又 $\{\mathscr{F}_n, n\in N\}$ 取为 X 的自然流，令

$$T_1(\omega)=\inf\{k: X_k=1\},$$

$$T_{n+1}(\omega)=\inf\{k: k>T_n,\ X_k=1\},\ n\geqslant1,$$

则由命题 4，$\{T_n,\ n\geqslant1\}$ 都是停时，且

$$P(T_1=n)=P(X_1=\cdots=X_{n-1}=0,\ X_n=1)=q^{n-1}p.$$

因而 $P(T_1<\infty)=1$，即 T_1 为有限停时，而 $X_{T_1}=1$. 对 T_n 亦可类似地考虑其分布.

6 定义 若 T 为停时，令

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_T&=\{B: B\in\mathscr{F}_\infty,\ \forall n\in N,\ B(T=n)\in\mathscr{F}_n\}\\&=\{B: B\in\mathscr{F}_\infty,\ \forall n\in N,\ B(T\leqslant n)\in\mathscr{F}_n\},\end{aligned}$$

则 $\mathscr{F}_T$ 称为 T 前事件 σ 域.

容易验证 $\mathscr{F}_T$ 为 σ 域，$\mathscr{F}_T\subset\mathscr{F}_\infty$，且对正整数 k 当 $T\equiv k$ 时，

$$\mathscr{F}_T=\mathscr{F}_k.$$

7 命题 设 T 为停时,则

i) $A\in\mathscr{F}_T$ 的充要条件是 A 可表为

$$A=\bigcup_n[A_n(T=n)]\cup[A_\infty(T=\infty)],A_n\in\mathscr{F}_n,\ A_\infty\in\mathscr{F}_\infty \quad (7.1)$$

ii) r.v. $\xi\in\mathscr{F}_T$ 的充要条件是 ξ 可表为

$$\xi=\sum_n\xi_n I_{(T=n)}+\xi_\infty I_{(T=\infty)}\quad \xi_n\in\mathscr{F}_n,\quad \xi_\infty\in\mathscr{F}_\infty$$

证 i) 若 $A\in\mathscr{F}_T$,令 $A_n=A(T=n)$ 及 $A_\infty=A(T=\infty)$,则 $A_n\in\mathscr{F}_n$, $A_\infty\in\mathscr{F}_\infty$,且 (7.1) 成立. 反之,由 (7.1) 规定的 A 不难按定义直接验证 $A\in\mathscr{F}_T$.

ii) 类似于 i) 证明之. #

8 命题 i) 若 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为适应序列, $T\in\mathscr{T}$,则 $X_{T(\omega)}I_{T(\omega)<\infty}\in\mathscr{F}_T$.

ii) 若 $X=\{X_n,n\in\overline{N}\}$ 为适应序列 ($\overline{N}=\{0,1,\cdots,+\infty\}$), $T\in\mathscr{T}$ 则 $X_{T(\omega)}\in\mathscr{F}_T$.

证 因

$$X_TI_{(T<\infty)}=\sum_{k=0}^{\infty}X_kI_{(T=k)},$$

$$X_T=\sum_{k=0}^{\infty}X_kI_{(T=k)}+X_\infty I_{(T=\infty)},$$

由命题 7, $X_TI_{(T<\infty)}$ 和 X_T 都是 $\mathscr{F}_T$ 可测的. #

9 命题 $T\in\mathscr{T}$, $\{T_k,k\geqslant 1\}\subset\mathscr{T}$,则

i) 对 $k\in N$, $T+k\in\mathscr{T}$,

ii) $\bigvee_k T_k,\bigwedge_k T_k\in\mathscr{T}$.

证 i) $(T+k=n)=(T=n-k)\in\mathscr{F}_{n-k}\subset\mathscr{F}_n\quad(n\geqslant k)$.

ii) $(\bigvee_k T_k\leqslant n)=\bigcap_k(T_k\leqslant n)\in\mathscr{F}_n$, $(\bigwedge_k T_k\leqslant n)=\bigcup_k(T_k\leqslant n)\in\mathscr{F}_n$. #

10 命题 设 $S,T\in\mathscr{T}$.

i) 若 $A\in\mathscr{F}_S$,则 $A(S\leqslant T)\in\mathscr{F}_T$, $A(S=T)\in\mathscr{F}_T$.

ii) 若 $S\leqslant T$,则 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$.

证 i) $A(S\leqslant T)(T=n)=A(S\leqslant n)(T=n)\in\mathscr{F}_n$.

ii) 对 $A\in\mathscr{F}_S$, 由 i) $A=A(S\leqslant T)\in\mathscr{F}_T$, 故 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$. #

11 命题 设 $T\in\mathscr{T}, A\in\mathscr{F}_T$, 则

$$T_A=TI_A+(+\infty)I_{A^c}\in\mathscr{T}$$

T_A 称为 T 在 A 上的限制.

证 $(T_A=n)=A(T=n)\in\mathscr{F}_n$. #

12 例 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列,

$$P(X_n=\pm 1)=\frac{1}{2}.$$

记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 令

$$T=\inf\{k:S_k=1\},$$

则由命题 4, T 为停时. 下面我们来求 T 的分布. 由于

$$(T\leqslant n)=(\max_{1\leqslant j\leqslant n}S_j\geqslant 1),\quad (S_n\geqslant 1)\subset(T\leqslant n),$$

所以

$$\begin{aligned}(T\leqslant n)&=(T\leqslant n,\ S_n\geqslant 1)+(T\leqslant n,\ S_n<1)\\&=(S_n\geqslant 1)+(T\leqslant n,\ S_n<1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(T\leqslant n,\ S_n<1)&=\sum_{k=1}^{n}P(T=k,\ S_n<1)=\sum_{k=1}^{n}P(T=k,\ S_n-S_k<0)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(T=k)P(S_n-S_k<0)=\sum_{k=1}^{n}P(T=k)P(S_n-S_k>0)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(T=k,\ S_n-S_k>0)=\sum_{k=1}^{n}P(T=k,S_n>1)\\&=P(T\leqslant n,\ S_n>1)=P(S_n>1)=P(S_n<-1).\end{aligned}$$

在此, 第三个等式利用了 $(T=k)$ 与 S_n-S_k 独立的事实, 第四个等式和最后一个等式利用了 X_k, S_n-S_k 和 S_n 都具有对称分布的条件. 由上式可得

$$\begin{aligned}P(T>n)&=1-P(T\leqslant n)=1-P(S_n\geqslant 1)-P(S_n<-1)\\&=P(S_n=0)+P(S_n=-1)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}P(S_n=0)=\binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}, & n=2m\\ P(S_n=-1)=\binom{2m-1}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}, & n=2m-1\end{cases}$$

$$\sim\sqrt{\frac{2}{n\pi}}$$

由此可见 $P(T<\infty)=1$，即 T 为有限停时，但因 $\sum\limits_n P(T>n)=+\infty$，故 $\mathsf{E}T=\infty$. 用类似的方法还可讨论停时 $T=\inf\{k:S_k=N\}$ 的分布.

二、Wald 等式

13 定义 适应序列 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 称为关于 σ 域流 $\boldsymbol{F}$ 独立，若对每个 $n\geqslant 1$，$\sigma(X_n)$ 与 $\mathscr{F}_{n-1}$ 独立.

关于 $\boldsymbol{F}$ 独立的 r.v. 序列本身必为独立 r.v. 序列，任一独立 r.v. 序列关于其自然流也必为独立的. 今后在带流概率空间中若不引起混淆，关于 $\boldsymbol{F}$ 独立就简称其为独立的.

14 定理 设 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 为关于 $\boldsymbol{F}$ 独立同分布 r.v. 序列，T 为有限停时，则

i) $\mathscr{F}_T$ 与 $\sigma(X_{T+1},X_{T+2},\cdots)$ 相互独立；

ii) $\{X_{T+n},\ n\geqslant 1\}$ 为关于 $\{\mathscr{F}_{T+n},\ n\geqslant 1\}$ 适应独立同分布 r.v. 序列，且与 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 有相同分布.

证 若 $\lambda_1\cdots,\lambda_n$ 为实数，$A\in\mathscr{F}_T$，利用 T 为有限停时，有

$$P\{A\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{A(T=k)\bigcap_{i=1}^{n}(X_{k+i}\leqslant\lambda_i)\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{A(T=k)\}P\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_{k+i}\leqslant\lambda_i)\}.$$

这里利用了 $A(T=k)\in\mathscr{F}_k$ 与 $(X_{k+i},1\leqslant i\leqslant n)$ 独立，因此

$$P\{A\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\}=\sum_{k=0}^{\infty}P(A(T=k))P(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{k+i}\leqslant\lambda))$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}P(A(T=k))\prod_{i=1}^{n}P(X_{K+i}\leqslant\lambda_i)=P(A)\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant\lambda_i).$$

特别地令 $A=\Omega$，有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\right)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant\lambda_i),\tag{14.1}$$

$$P\left\{A\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\right\}=P(A)P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\right),$$

即 $\mathscr{F}_T$ 与 $\sigma(X_{T+n},\ n\geqslant1)$ 独立 i) 成立.

由命题 8, $\{X_{T+n},\ n\geqslant1\}$ 为 $\{\mathscr{F}_{T+n},\ n\geqslant1\}$ 适应的, 由 i) X_{T+k+1} 与 $\mathscr{F}_{T+k}$ 独立, 再由 (14.1),

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{n}(X_{T+i}\leqslant\lambda_i)\right\}=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\leqslant\lambda_i)=\prod_{i=1}^{n}P(X_1\leqslant\lambda_i),$$

故 ii) 成立. #

15 定理 (Wald等式) 设 $X=\{X_n,\ n\geqslant1\}$ 为关于 $\boldsymbol{F}$ 独立同分布 r.v. 序列, T 为停时, $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 若 X_1 准可积, $\mathsf{E}T<\infty$, 则

$$\mathsf{E}S_T=\mathsf{E}T\cdot\mathsf{E}X_1\tag{15.1}$$

证 先设 $P(X_1\geqslant0)=1$. 由 Lévi 引理,

$$\mathsf{E}(S_T)=\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_jI_{(T\geqslant j)}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}X_jI_{(T\geqslant j)}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}X_j\mathsf{E}I_{(T\geqslant j)}$$

$$=\mathsf{E}X_1\sum_{j=1}^{\infty}P(T\geqslant j)=\mathsf{E}X_1\mathsf{E}T.$$

在上式中第三个等号是由于 $(T\geqslant j)=(T\leqslant j-1)^c\in\mathscr{F}_{j-1}$, 故 X_j 与 $(T\geqslant j)$ 独立.

若 X_1 为准可积的, 不妨设 $\mathsf{E}X_1^-<\infty$, 则

$$\mathsf{E}S_T^-\leqslant\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^-I_{(T\geqslant j)}\right)=\mathsf{E}T\mathsf{E}X_1^-<\infty,$$

因而 S_T 为准可积的. 对 X_j^-, X_j^+ 可分别用 (15.1), 并由

$$\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^-I_{T\geqslant j}\right)<\infty,$$

有

$$\mathsf{E}S_T=\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}(X_j^+-X_j^-)I_{T\geqslant j}\right)=\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^+I_{T\geqslant j}\right)-\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{\infty}X_j^-I_{T\geqslant j}\right)$$

$$=\mathsf{E}T\cdot\mathsf{E}X_1^+-\mathsf{E}T\cdot\mathsf{E}X_1^-=\mathsf{E}T\cdot\mathsf{E}X_1.$$

定理证毕．#

16 定理（Wald 等式） 设 $X=\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为关于 $\boldsymbol{F}$ 独立同分布的 r.v. 序列，$\mathsf{E}X_1=0$，$\mathsf{E}X_1^2=\sigma^2<\infty$．$T$ 为一有限停时，$\mathsf{E}T<\infty$，

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j,$$

则

$$\mathsf{E}S_T^2=\sigma^2\mathsf{E}T \tag{16.1}$$

证 记 $T(n)=\min(T, n)$，由命题 9，$T(n)$ 为有界停时．又记

$$Y_j=X_jI_{(T\geqslant j)},$$

有

$$S_{T(n)}=\sum_{j=1}^{n}X_jI_{(T\geqslant j)}=\sum_{j=1}^{n}Y_j.$$

当 $i\neq j$ 时，不妨设 $i<j$，由 $I_{(T\geqslant j)}X_iI_{(T\geqslant i)}\in\mathscr{F}_{j-1}$，故有

$$\mathsf{E}Y_jY_i=\mathsf{E}X_jI_{(T\geqslant j)}X_iI_{(T\geqslant i)}=\mathsf{E}X_j\mathsf{E}I_{(T\geqslant j)}X_iI_{(T\geqslant i)}=0,$$

即 $\{Y_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 相互正交。故当 $m<n$ 时，有

$$\mathsf{E}(S_{T(n)}-S_{T(m)})^2=\mathsf{E}(\sum_{j=m+1}^{n}X_jI_{(T\geqslant j)})^2=\sum_{j=m+1}^{n}\mathsf{E}(X_j^2I_{(T\geqslant j)})$$

$$=\sigma^2\mathsf{E}(\sum_{j=1}^{n}I_{(T\geqslant j)}-\sum_{j=1}^{m}I_{(T\geqslant j)})=\sigma^2(\mathsf{E}T(n)-\mathsf{E}T(m)) \tag{16.2}$$

$$\mathsf{E}S_{T(n)}^2=\sigma^2\mathsf{E}(\sum_{j=1}^{n}I_{(T\geqslant j)})=\sigma^2\mathsf{E}T(n). \tag{16.3}$$

当 $n\to\infty$ 时，$T(n)\uparrow T$，并由 T a.s. 有限，故 $S_{T(n)}\to S_T$ a.s.．由 Levi 引理，$\mathsf{E}(T(n))\uparrow\mathsf{E}T<\infty$，故 (16.2) 右端趋于零，因此

$$S_{T(n)}\to S_T \quad \text{a.s. 且 } L^2$$

在 (16.3) 中令 $n\to\infty$ 即得 (16.1)．#

小 结

本章和下一章在前两章建立的用测度论术语规定的概率空间基础上展开了对概率论问题的讨论。本章是围绕独立性展开各种问题的讨

论的。独立性是概率论中最早引入的概念之一。独立 r.v. 序列的性质也是讨论最早、结果最多的一个方面。虽然以后的讨论并不局限于独立 r.v. 序列，但对非独立 r.v. 序列的讨论，从方法到结果都可从独立 r.v. 序列的讨论中得到不少启发和借鉴。

§1 从事件独立性概念出发引入了事件域和随机变量的独立性概念。随后便介绍了两个最基本的零壹律——Колмогоров 零壹律和 Borel–Cantelli 引理。§2 讨论了独立 r. v. 序列构成级数的收敛性，其最一般的结果是 Колмогоров 的三级数定理 2.7. 在证明这一定理过程中用到的 Колмогоров 不等式 2.2 及定理 2.3都是十分有用的结论。独立项级数的另一个重要结果是定理 2.11，而证明这一结果时用到的 Ottaviani 不等式 2.10 和 Levy 不等式 2.12 都是十分有用的。它们和Колмогоров不等式都是用来估计$P(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|>a)$ 的。§3 讨论了大数定律，包括弱大数定律和强大数定律。在这里，强大数定律是用 §2 的结论加上 Kronecker 引理 3.5 来证明的。i. i. d. 场合在这里都有较充分的讨论（3.3，3.4 和 3.8，3.9），而截尾和对称化方法是证明中经常用到的方法。§4 内容不仅与独立性有关，而且更多地是与下一章的鞅有关。σ 域流和停时已成为现代概率论和随机过程中最基本的概念。本章 §2 在证明许多不等式时，事实上已多次用到停时的概念与方法，这里只对停时及有关性质作初步的介绍，并在这一节最后的几个定理中对，独立 r.v. 序列运用了这些概念推导Wald 等式和其它一些结果。

习　题

1. i) 对任意事件列 $\{E_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$，证明

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\right)\geqslant \sum_{j=1}^{n} P(E_j)-\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} P(E_jE_k);$$

ii) 若对每个 n，$\{E_j^{(n)}, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 为独立事件列，且

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} P(E_j^{(n)})=0,$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j^{(n)})}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(E_j^{(n)})}=1.$$

2. 若 r.v. X, Y 相互独立，证明：i) 若 $P(X=Y)=1$，则必有常数 c 使

$$P(X=Y=c)=1;$$

ii) 若 $P(X=Y)>0$，则必有常数 c 使 $P(X=Y=c)>0$.

3. 若 r.v. X, Y 相互独立， $\mathrm{E}|X+Y|^p<\infty, p>0$，证明 $\mathrm{E}|X|^p<\infty$，$\mathrm{E}|Y|^p<\infty$.

4. 若 X_1, X_2, X_3 为独立对称分布 r.v.，且

$$P(|\sum_{i=1}^{3}X_i|\leqslant M)=1,$$

证明

$$P(\sum_{i=1}^{3}|X_i|\leqslant M)=1.$$

5. 若 X, Y 为独立同分布 r.v.，m 为 X 的分布的中位数，即

$$P(X\geqslant m)\geqslant\frac{1}{2},\quad P(X\leqslant m)\geqslant\frac{1}{2}.$$

证明对任一 c，有

$$P(X-m\geqslant c)\leqslant 2P(X-Y\geqslant c),$$
$$P(|X-m|\geqslant c)\leqslant 2P(|X-Y|\geqslant c).$$

6. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为i.i.d. r.v. 序列，

$$P(X_1=0)<1,\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n\geqslant 1.$$

证明：对每个 $c>0$，存在整数 n，使 $P(|S_n|>c)>0$。

7. 若 $\{A_n\}$ 为独立事件列，

$$P(A_n)<1\geqslant n\geqslant 1, P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=1$$

证明 $P(A_n\quad \text{i.o.})=1$.

8. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列，$\sum\limits_n \mathrm{E}X_n^2<\infty$，证明 $\mathrm{E}(\sup\limits_n X_n)<\infty$

9. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. 随机向量序列，

$$P(X_n=(e_1,\cdots,e_k)=\frac{1}{2k},$$

其中$e_j=1,\ 0,\ -1$，且$\sum\limits_{j=1}^{k}e_j^2=1$。试证当$k=3$，$P(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=(0,\ \cdots,\ 0)$ i. o.$)=0$。

10. 若$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为i.i.d. r.v.序列，证明下列各个条件等价：

i) $\overline{\lim\limits_{n}}\dfrac{|X_n|}{n}<\infty$ a.s.， ii) $\sum\limits_{n}P(|X_n|\geqslant n)<\infty$，

iii) $\mathbf{E}|X_1|<\infty$ ， iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{n}=0$，a.s.

11. 证明对i.i.d. r.v.序列$\{X_n,\ n\geqslant1\}$，$P(\overline{\lim}\ X_n=+\infty)=1$的充要条件是$X_1$为无界的，即$P(X_1<c)<1$对每个$c<\infty$成立。

12. 若$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为i.i.d. r.v.序列，$P(X_1\neq0)>0$，证明$P(\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n$收敛有限$)=0$。

13. 设$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为i.i.d. r.v.序列，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{\log n}=0\ \text{a.s.}$$

的充要条件是对某个(任一)$c>0$ $\mathbf{E}(e^{c|X_1|})<\infty$。

14. 设$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为i.i.d. r.v.序列。i) 若$P(X_1\geqslant x)=e^{-\lambda x}$，$x\geqslant0$，则

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n}{\log n}=\frac{1}{\lambda}\right)=1.$$

ii) 若 $P(X_1=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$，则

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{X_n\log\log n}{\log n}=1\right)=1.$$

$\left(\text{提示：利用}\ \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\leqslant P(X_1\geqslant n)\leqslant\dfrac{\lambda^n}{n!}\right)$.

15. 设$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为独立r.v.序列，$\mathbf{E}X_n=0$，$\mathbf{E}X_n^2<\infty$，证明

$$\mathbf{E}\{\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{j=1}^{k}X_j|\}\leqslant2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}X_k^2}\ .$$

16 设$\{X_n,\ n\geqslant1\}$为非负独立r.v.序列，若对某个$c\geqslant0$

$$\sum_n P(X_n>c)<\infty,\qquad \sum_n\mathbf{E}(X_n\wedge c)<\infty,$$

则$\sum\limits_n X_n$ a.s.收敛。反之，若$\sum\limits_n X_n$ a.s.收敛，则对任一$c>0$，上述两个级数同时收敛。

17. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列. i) 若 $\mathsf{E}X_n=0$, 且

$$\sum_n(\mathsf{E}X_n^2 I_{(|X_n|\leqslant 1)}+\mathsf{E}|X_n|I_{(|X_n|>1)})<\infty$$

则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛;

ii) 若存在 $\{\alpha_n\}$, $0<\alpha_n\leqslant 2$, $\sum_n \mathsf{E}|X_n|^{\alpha_n}<\infty$, 且当 $1\leqslant\alpha_n\leqslant 2$ 时, $\mathsf{E}X_n=0$, 则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛.

18. 若 $\varphi(x)$ 为 R' 上正的偶函数, 且 $x>0$ 随 x 递增时

$$\frac{\varphi(x)}{x}\uparrow,\ \frac{\varphi(x)}{x^2}\downarrow.$$

又 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 列, $\mathsf{E}X_n=0$, $\{b_n\}$ 为递增正数列, 设

$$\sum_n\frac{\varphi(X_n)}{\varphi(b_n)}<\infty, \text{ 证明 } \sum_n\frac{X_n}{b_n} \text{ a.s. 收敛.}$$

19. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列, $\mathsf{E}|X_n|<\infty$, $\mathsf{E}X_n=0$.

i) 若 $\sum_n\dfrac{X_n^2}{1+|X_n|}<\infty$, 则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛.

ii) 若 $\mathsf{E}(\sup_n|X_n|)<\infty$, 则 $\sum_n\mathsf{E}\dfrac{X_n^2}{1+|X_n|}<\infty$ 与 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛等价.

20. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列,

$$P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2},$$

$\{a_n\}$为实数列, 试证 $\sum_n a_n X_n$ a.s. 收敛的充要条件是 $\sum_n a_n^2<\infty$.

21. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列。i) 若 X_n 为 $N(m_n, \sigma_n^2)$ 分布, $n\geqslant 1$, 则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛的充要条件是 $\sum_n m_n$, $\sum_n\sigma_n^2$ 同时收敛。

ii) 若 X_n 为指数分布, $P(X_n>x)=e^{-\lambda_n x}$, $x>0$, 则 $\sum_n X_n$ a.s. 收敛的充要条件是 $\sum_n\lambda_n^{-1}<\infty$.

22. 设 $\{A_n, n\geqslant 1\}$, $\{B_n, n\geqslant 1\}$ 为事件序列, $A_0=\varnothing$, 又下列两条件之一成立: i) 对 $n\geqslant 1$, B_n 与 $A_n A_{n-1}^c\cdots A_0^c$ 独立; ii) 对 $n\geqslant 1$, B_n 与 $\{A_n, A_n A_{n+1}^c, A_n A_{n+1}^c A_{n+2}^c, \cdots\}$ 独立, 证明

$$P(\bigcup_{n\geqslant 1}A_n B_n)\geqslant P(\bigcup_{n\geqslant 1}A_n)\inf_n P(B_n),$$

并由此推出 Ottaviani 不等式.

23. 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列,

$$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j,$$

$m(Y)$ 表示 Y 的中位数，证明对任一 $\varepsilon>0$，有

$$P(\max_{1\leq j\leq n}[S_j-m(S_j-S_n)]\geq\varepsilon)\leqslant 2P(S_n\geq\varepsilon),$$

$$P(\max_{1\leq j\leq n}|S_j-m(S_j-S_n)|\geq\varepsilon)\leqslant 2P(|S_n|\geq\varepsilon),$$

并由此不等式推出命题 3.11。

24．设 $\{X_n,\ n\geq1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，且

$$P(X_1=k)=P(X_1=-k)=\frac{c}{k^2\log k},\quad k\geq3,\quad c=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2\log k}\right)^{-1}.$$

试证：$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\xrightarrow{P}0$，但 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$ 并不 a.s. 收敛于 0.

25．若 $\{X_n,n\geq1\}$ 为独立 r.v. 序列，且对某个 $P\in[1,2]$，$\sum_n n^{-P}\mathbf{E}|X_n|^P<\infty$，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathbf{E}X_j)=0$ a.s.，特别地对独立 r.v. 序列 $\{X_n,\ n\geq1\}$，若 $\mathbf{E}|X_n|^{1+\delta}\leqslant M<\infty$，$\delta>0$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mathbf{E}X_j)=0 \text{ a.s.}$$

26．若 $\{X_n,\ n\geq1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，$\mathbf{E}X_1^+=+\infty$，$\mathbf{E}X_1^-<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j=+\infty \text{ a.s.}.$$

27．设 $\{X_n,\ n\geq1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，对 $0<p<2$

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\frac{1}{p}}|S_n-C_n|<+\infty$ a.s.，$\{C_n\}$ 为常数列，则 $\mathbf{E}|X_1|^p<\infty$.

28．若 $\{X_n,\ n\geq1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 若 $\mathbf{E}|X_1|^p<\infty$，$p\geq1$，

则 $\frac{S_n}{n}\to\mathbf{E}X_1$ a.s.，L^p.

29．设 S,T 为停时，则 $S+T,ST$ 也是停时.

30．设 T 为停时，证明 $\bigvee_n\mathscr{F}_{T+n}=\mathscr{F}_\infty$.

31．设 S,T 为停时，则 $\mathscr{F}_{S\vee T}=\mathscr{F}_S\vee\mathscr{F}_T$，$\mathscr{F}_{S\wedge T}=\mathscr{F}_S\cap\mathscr{F}_T$.

32．设 $\{X_n,\ n\geq1\}$ 为 F 独立 r.v. 序列，$\mathbf{E}X_n=0$，$\sup_n\mathbf{E}|X_n|<\infty$，$T$ 为停时，$\mathbf{E}T<\infty$，则 $\mathbf{E}(\sum_{j=1}^{T}X_j)=0$.

33. 设$\{X_n, n\geqslant 1\}\{Y_n, n\geqslant 1\}$分别为 i.i.d. r.v. 序列, $\mathbf{E}X_n=\mathbf{E}Y_n=0$, $\mathbf{E}X_n^2<\infty$, $\mathbf{E}Y_n^2<\infty$. 又T为停时, $\mathbf{E}T<\infty$, 则

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{T} X_j\right)\left(\sum_{j=1}^{T} Y_j\right)=\mathbf{E}T\,\mathbf{E}(X_1Y_1).$$

34. 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为 i.i.d. r.v. 序列, $P(X_n=1)=p, P(X_n=0)=1-p$. 又$T_1=\inf\{k: X_k=1\}$, $T_{n+1}=\inf\{k: k>T_n, X_k=1\}$. 试求$\{T_n, n\geqslant 1\}$的分布.

35. 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为 i.i.d. r.v. 序列, X_1为$[0,1]$上均匀分布. 又

$$T=\inf\{n: \sum_{j=1}^{n} X_j\geqslant 1\}, \text{ 则 } \mathbf{E}T=e, \mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{T} X_j\right)=\frac{e}{2}.$$

36. 设$\{X_n, n\geqslant 1\}$为独立 r. v. 序列, $\mathbf{E}X_n=0$, $\mathbf{E}X_n^2=\sigma_n^2<\infty$. T为停时, 且$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{T}\sigma_j^2\right)<\infty$, 则

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{T} X_j\right)^2=\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^{T}\sigma_j^2\right).$$

37. 若$\{X_n, n\geqslant 1\}$为 i.i.d. r.v. 序列, B为 Borel 集, $P(X_1\in B)>0$. $T=\inf\{n: X_n\in B\}$, 则

i) $P(T<\infty)=1$,

ii) X_T与$\sum_{i=1}^{T-1} X_i$独立,

iii) 若$\mathbf{E}|X|<\infty$, 则$\mathbf{E}X_T=\mathbf{E}[XI_{(X\in B)}]\mathbf{E}T$.

第四章　条件期望与鞅

§1　广义测度

一、Hahn-Jordan 分解

1　定义　可测空间$(\Omega,\mathscr{F})$上的取值$[-\infty,+\infty]$的集函数μ若满足 i) $\mu(\varnothing)=0$，ii) $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$，则称$\mu$为**广义测度**或**变号测度**(有时也把广义测度称为测度，而把定义 2.1.2 规定的测度称为**正测度**)．

若$(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$是测度空间，$f$为其上(准)可积函数，则

$$\mu(A)=\int_A f(x)\lambda(dx)$$

就是一个广义测度．

若μ为广义测度，它必定是有限可加的，即

$$\mu(A+B)=\mu(A)+\mu(B)$$

又 ii) 意味着其右端$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$总是有明确含义的，即不会发生$(+\infty)+(-\infty)$的不定型．因此$(\Omega,\mathscr{F})$上的广义测度决不会同时取到$+\infty$和$-\infty$．若不然，$\mu(A)=+\infty$，$\mu(B)=-\infty$，则为了使和式有确定含义，必有

$$\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A)=+\infty,$$
$$\mu(A\cup B)=\mu(B)+\mu(A\setminus B)=-\infty,$$

这将引起矛盾．所以今后都认为μ在$]-\infty,+\infty]$取值．类似于命题 2.1.7．，若$A_n\uparrow A$，则$A=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})$ $(A_0=\varnothing)$，

$$\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j-A_{j-1})=\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j-A_{j-1})$$
$$=\mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty}(A_j-A_{j-1})\Big)=\mu(A).$$

若 $A_n\downarrow A$ 且 $\mu(A_{n_0})<+\infty$，则 $\mu(A_n)\to\mu(A)$.

2　引理　若 μ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度，则必存在 $C\in\mathscr{F}$ 使

$$\mu(C)=\inf_{A\in\mathscr{F}}\mu(A).\tag{2.1}$$

证　记 $\beta=\inf\mu(A)$，则对每个 n 必有 $A_n\in\mathscr{F}$，使

$$\mu(A_n)<\beta\vee(-n)+\frac{1}{n}$$

取 $A=\bigcup_n A_n$，$\mathscr{A}_n=\Big\{\bigcap_{k=1}^{n}A_k';\,A_k'=A_k\text{或}A_k'=A-A_k\Big\}$，则 $\mathscr{A}_n$ 中集合是对 A 的一个分割，且随 n 增大分割将越来越细（即 $\mathscr{A}_n$ 中集合都是 $\mathscr{A}_{n+1}$ 中某些集合的并）。令

$$B_n=\bigcup_{\substack{C_i\in\mathscr{A}_n\\ \mu(C_i)<0}}C_i,$$

则 $B_{n+1}\setminus(B_n\cup\cdots\cup B_{n+k})$ 由 $\mathscr{A}_{n+1}$ 中若干个 C_i 之并构成，且这些 C_i 都满足 $\mu(C_i)<0$，故对 $n'>n$，有

$$\beta\vee(-n)+\frac{1}{n}>\mu(A_n)>\mu(B_n\cup B_{n+1}\cup\cdots\cup B_{n'})\geqslant\mu(\bigcup_{k\geqslant n}B_k)\geqslant\beta$$

取 $C=\overline{\lim_n}B_n\in\mathscr{F}$，则 $\bigcup_{k\geqslant n}B_k\downarrow C$，由于 $\mu(\bigcup_{k\geqslant n}B_k)<\infty$，故

$$\mu(C)=\lim_{n\to\infty}\mu(\bigcup_{k\geqslant n}B_k)=\beta,$$

顺便也得到了 $\beta>-\infty$. #

3　定理　(Hahn)　若 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度，则

i) 存在互不相交的 D^+，$D^-\in\mathscr{F}$，使 $\Omega=D^++D^-$，且可测集 $A\subset D^+(D^-)$ 必有 $\mu(A)\geqslant0(\leqslant0)$;

ii) 若 $\Omega=\tilde{D}^++\tilde{D}^-$，且对可测集 $A\subset\tilde{D}^+(\tilde{D}^-)$ 必有

$$\mu(A)\geqslant0\ (\leqslant0),$$

则 $\tilde{D}^+\triangle D^+(\tilde{D}^-\triangle D^-)$的一切可测子集都是 μ 零集.

证 i) 若 C 由(2.1)规定，取 $D^+=C^c, D^-=C$，则当可测集 $A\subset D^-$ 时，由 $\mu(D^--A)\geqslant\beta$，可得

$$\mu(A)=\mu(D^-)-\mu(D^--A)\leqslant\beta-\beta=0$$

当可测集 $A\subset D^+$时，由 $\mu(D^-+A)\geqslant\beta$，可得

$$\mu(A)=\mu(A+D^-)-\mu(D^-)\geqslant\beta-\beta=0.$$

ii) 若 $A\subset D^+\setminus\tilde{D}^+$，则因 $A\subset D^+$，$\mu(A)\geqslant0$. 另一方面，$A\subset(\tilde{D}^+)^c=\tilde{D}^-$，故 $\mu(A)\leqslant0$. 因此 $\mu(A)=0$. 类似地，当 $A\subset\tilde{D}^+\setminus D^+$时也有 $\mu(A)=0$. 所以，$D^+\triangle\tilde{D}^+$ 的一切可测子集都是 μ 零集. 也可同样证明 $\tilde{D}^-\triangle D^-$ 的可测子集有同一性质.

4 定理(Jordan) 若 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度，C 由(2.1)规定，则 i) 对每个 $A\in\mathscr{F}$，若取

$$\mu^+(A)=\mu(AC^c),\qquad \mu^-(A)=-\mu(AC),\tag{4.1}$$

则 μ^+,μ^- 都是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的正测度，$\mu=\mu^+-\mu^-$，且

$$\mu^+(A)=\sup\{\mu(B):B\subset A,B\in\mathscr{F}\},\tag{4.2}$$

$$\mu^-(A)=\sup\{-\mu(B):B\subset A,B\in\mathscr{F}\}.\tag{4.3}$$

ii)若 $\mu=\mu_2-\mu_1$，μ_2,μ_1 都是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上正测度，则对每个 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\mu^+(A)\leqslant\mu_2(A),\qquad \mu^-(A)\leqslant\mu_1(A).$$

证 i)由定理3的结论容易推出 μ^+,μ^- 为正测度，又

$$\mu(A)=\mu(AC^c)+\mu(AC)=\mu^+(A)-\mu^-(A).$$

对任一可测集 $B\subset A$，

$$\mu(B)=\mu^+(B)-\mu^-(B)\leqslant\mu^+(B)\leqslant\mu^+(A)$$

即 $\sup\{\mu(B):B\in\mathscr{F},B\subset A\}\leqslant\mu^+(A)$. 特别取 $B=AC^c$ 即知(4.2)成立. 同样可证(4.3).

ii) 由于

$$\mu^+(A)=\mu(AC^c)\leqslant\mu_2(AC^c)\leqslant\mu_2(A)$$

同样可证 $\mu^-(A)\leqslant\mu_1(A)$.

5 定义 若 μ 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上广义测度，按定理 3，$\Omega=D+D^c$ 称为空间关于 μ 的 Hahn 分解．按定理 4，$\mu=\mu^+-\mu^-$ 称为 μ 的 Jordan 分解，μ^+,μ^- 及 $|\mu|=\mu^++\mu^-$ 分别称为 μ 的**正变差，负变差和全变差**．对广义测度 μ_1,μ_2，我们规定

$$\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,$$
$$\mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+.$$

若 $(\Omega,\mathscr{F},\lambda)$ 是测度空间，f 为其上的准可积函数，则关于广义测度 $\mu(A)=\int_A f(\omega)\lambda(d\omega)$ 空间 Ω 的 Hahn 分解为

$$\Omega=\{\omega:f(\omega)\geqslant 0\}+\{\omega:f(\omega)<0\}$$

而 μ 的正变差、负变差和全变差分别为 $(f^+(\omega)=\max(f(\omega),0),)$

$$\mu^+(A)=\int_A f^+(\omega)\lambda(d\omega),\qquad \mu^-(A)=\int_A f^-(\omega)\lambda(d\omega),$$

$$|\mu|(A)=\int_A|f(\omega)|\lambda(d\omega).$$

设在 $([0,1],\mathscr{B}_{[0,1]})$ 上，

$$\mu_1(A)=\int_A(I_{[0,\frac{1}{2}]}(x)-I_{]\frac{1}{2},1]}(x))dx,$$

$$\mu_2(A)=\int_A(-I_{[0,\frac{1}{2}]}(x)+I_{]\frac{1}{2},1]}(x))dx,$$

则

$$\max(\mu_1([0,1]),\mu_2([0,1]))=0\neq 1=(\mu_1\vee\mu_2)([0,1]).$$

由 Hahn-Jordan 分解定理，对广义测度的很多问题的研究都可归结为正测度情形来考虑．

6 系 对 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上广义测度 μ，下列三条件是等价的：

i) μ 为有界的：$\sup\limits_{A\in\mathscr{F}}|\mu(A)|<\infty$；

ii) μ 为有限的：对每个 $A\in\mathscr{F}$，$|\mu(A)|<\infty$；

iii) $\mu(\Omega)<\infty$.

二、Lebesgue 分解

7 定理(Lebesgue) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, ν 为其上的有限测度, 则存在唯一的 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及可略集 N, 使对每个 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)P(d\omega)+\nu(AN) \tag{7.1}$$

证 记 $\mathscr{L}=\{Y:Y$ 为 r.v., $\int_A YdP\leqslant\nu(A),\forall A\in\mathscr{F}\}$, 则

i) $0\in\mathscr{L}$, $\mathscr{L}$ 为非空的;

ii) 若 $Y_1,Y_2\in\mathscr{L}$, 则有

$$\int_A(Y_1\vee Y_2)dP=\int_{A(Y_1\leqslant Y_2)}Y_2dP+\int_{A(Y_1>Y_2)}Y_1dP\leqslant\nu(A(Y_1\leqslant Y_2))$$
$$+\nu(A(Y_1>Y_2))=\nu(A),$$

故 $Y_1\vee Y_2\in\mathscr{L}$;

iii) 若 $Y_n\in\mathscr{L}$, $Y_n\uparrow Y$, 则由 Lévi 引理, $Y\in\mathscr{L}$.

因此按命题 2.4.3 及注 2.4.5, $\mathscr{L}$ 有最大元 f, 且

$$\int_A f(\omega)P(d\omega)\leqslant\nu(A),\qquad \forall A\in\mathscr{F}.$$

记 $\nu_s(A)=\nu(A)-\int_A fdP$, $A\in\mathscr{F}$, 它是一个测度. 又以 D_n^+,D_n^- 表示 Ω 关于 $\nu_s-\frac{1}{n}P$ 的 Hahn 分解, 则

$$\nu_s(AD_n^+)\geqslant\frac{1}{n}P(AD_n^+),\qquad \nu_s(AD_n^-)\leqslant\frac{1}{n}P(AD_n^-),$$

且因

$$\int_A\left(f+\frac{1}{n}I_{D_n^+}\right)dP=\int_A fdP+\frac{1}{n}P(AD_n^+)\leqslant\int_A fdP+\nu_s(A)=\nu(A),$$

故 $f+\frac{1}{n}I_{D_n^+}\in\mathscr{L}$. 又由 f 为最大元, 故 $f=f+\frac{1}{n}I_{D_n^+}$ a.s., 即 $P(D_n^+)$

$=0$. 取 $N=\bigcup\limits_n D_n^+$, 则 $P(N)=0$。另一方面,

$$\nu_s(N^c)\leqslant\nu_s(D_n^-)\leqslant\frac{1}{n}P(D_n^-)\leqslant\frac{1}{n},$$

故 $\nu_s(N^c)=0$. 且

$$\nu(A)=\nu(AN)+\nu(AN^c)=\nu(AN)+\nu_s(AN^c)+\int_{AN^c}fdP$$

$$=\nu(AN)+\int_A fdP.$$

故 (6.1) 为真. 若 ν 有另一分解, $g\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$, M 为可略集, 使

$$\nu(A)=\int_A gdP+\nu(AM),$$

因为 $M\cup N$ 为 P 可略集, 故对每个 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\int_A fdP=\int_{A(M\cup N)^c}fdP=\nu(A(M\cup N)^c)=\int_{A(M\cup N)^c}gdP=\int_A gdP$$

故 $f=g$ a.s.. 又

$$\nu(N)=\int_N gdP+\nu(MN)=\nu(MN)=\int_M fdP+\nu(MN)=\nu(M),$$

故 $M\triangle N$ 既是 P 可略集, 又是 ν 可略集, 唯一性得证.

8 定义 测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mu)$ 上的可测函数 f 称为 σ 可积的, 若存在互不相交的可测集序列 $\{A_n, n\geqslant 1\}$, $\sum\limits_n A_n=\Omega$, 使 $\int_{A_n}|f|d\mu<\infty$. 这时, 若 $\sum\limits_n\int_{A_n}fd\mu$ 有意义, 就记它为 $\int fd\mu$.

9 命题(定理 7 的推广) 设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间, μ,ν 为其上 σ 有限广义测度(不取 $-\infty$), 则必存在唯一关于 $|\mu|$ 为 σ 可积的 f 及 $|\mu|$ 可略集 N, 使对每个 $A\in\mathscr{F}$ 有

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)|\mu|(d\omega)+\nu(AN). \tag{9.1}$$

证 首先, 不妨设 μ 是正测度, 否则代之以考虑 $|\mu|$. 下面我们分几步

加以证明.

i) 若 μ,ν 都是有限测度，则容易由命题 7 推出 (9.1).

ii) 若 μ,ν 为 σ 有限测度，$\{A_n, n\geq 1\}$ 为 Ω 的分割，$\nu(A_n)$，$\mu(A_n)$ 都有限，则对每个 n 存在 $f_n\geq 0$ 及可略集 N_n，$I_{A_n}f_n\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\mu)$，且有

$$\nu(AA_n)=\int_{AA_n} f_n d\mu+\nu(AA_nN_n).$$

取 $f=\sum_n f_n I_{A_n}$，$N=\sum_n N_n A_n$，则 f 对 μ 为 σ 可积，且由于 ν 的 σ 可加性及 f 为非负的，有

$$\nu(A)=\sum_n \nu(AA_n)=\sum_n \int_{AA_n} f_n d\mu+\sum_n \nu(AA_nN_n)$$

$$=\int_A f d\mu+\nu(AN).$$

iii) 若 ν 是 σ 有限广义测度，以 D^+，D^- 表示 Ω 关于 ν 的 **Hahn** 分解，则对 ν^+,ν^- 分别用 ii)，有

$$\nu^+(A)=\nu^+(AD^+)=\int_{AD^+} g_+ d\mu+\nu^+(AD^+N_+)$$

$$=\int_A g_+ I_{D^+} d\mu+\nu(AD^+N^+),$$

$$\nu^-(A)=\nu^-(AD^-)=\int_{AD^-} g_- d\mu+\nu^-(AD^-N^-)$$

$$=\int_A g_- I_{D^-} d\mu+\nu(AD^-N^-).$$

注意 ν^- 为有界的，令 $f=g_+I_{D^+}-g_-I_{D^-}$，$N=D^+N^++D^-N^-$，则 f 对 $|\mu|$ σ 可积，且

$$\nu(A)=\nu^+(A)-\nu^-(A)=\int_A f d\mu+\nu(AN),\ A\in\mathscr{F}.$$

唯一性的证明可象定理 7 一样进行.

9 定义 可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的广义测度 μ,ν，若对每个 $A\in\mathscr{F}$，由 $|\mu|(A)=0$ 可推出 $\nu(A)=0$，则称 ν 关于 μ 是**绝对连续的**，记为 $\nu\ll\mu$.

若 $\mu\ll\nu,\nu\ll\mu$ 同时成立，则记为 $\mu\equiv\nu$ 或 $\mu\sim\nu$，称 μ,ν 相互等价．若存在$A\in\mathscr{F}$，使 $|\mu|(A)=0,|\nu|(A^c)=0$，则称 μ,ν 相互奇异，记为 $\mu\perp\nu$.

11　定理　若 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间，μ,ν 为其上的 σ 有限广义测度，则可将 ν 唯一地表为 $\nu=\nu_1+\nu_1$，ν_1,ν_2 都是 σ 有限广义测度，且 $\nu_2\ll\mu$，$\nu_2\perp\mu$.

上述分解又称 ν 关于 μ 的 Lebesgue 分解．

证　由 (9.1) 取

$$\nu_1(A)=\int_A f(\omega)|\mu|(d\omega),\qquad\qquad \nu_2(A)=\nu(AN),$$

即可满足要求．唯一性可仿定理 7 的唯一性一样证明．若 $\nu=\tilde{\nu}_1+\tilde{\nu}_2$ 是另一分解，$|\mu|$ 零集 $N,\tilde{N}$分别满足 $|\nu_2|(N^c)=0,|\tilde{\nu}_2|(\tilde{N}^c)=0$，则对 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\begin{aligned}\nu_1(A)&=\nu_1(AN^c)=\nu(AN^c)=\nu(AN^c\tilde{N}^c)=\nu(A\tilde{N}^c)\\&=\tilde{\nu}_1(A\tilde{N}^c)=\tilde{\nu}_1(A),\\ \nu_2(A)&=\nu(A)-\nu_1(A)=\nu(A)-\tilde{\nu}_1(A)=\tilde{\nu}_2(A),\end{aligned}$$

所以 $\nu_1=\tilde{\nu}_1,\nu_2=\tilde{\nu}_2$．#

三、Radon－Nikodym 定理

12　命题　设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，ν 为其上有限测度，则下列条件等价：

i) $\nu\ll P$;

ii) 存在$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$ 使对每个$A\in\mathscr{F}$ 有

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)P(\mathrm{d}\omega);\tag{12.1}$$

iii) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $P(A)<\delta$ 时，必有 $\nu(A)<\varepsilon$.

证　i)⇒ii) 由 (7.1)，因 $P(AN)=0$，故 $\nu(AN)=0$，(12.1) 成立．

ii)⇒iii) 当 f 为阶梯函数时，由于它有界，$|f|\leqslant M$，故

$$\nu(A)\leqslant MP(A),$$

取 $\delta\leqslant\varepsilon/M$ 即可．对一般的$f\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，若 $\varepsilon>0$ 为任一数，则必有阶梯函数 f_ε 使

$$\int|f-f_\varepsilon|\mathrm{d}P<\varepsilon/2.$$

若 $|f_\varepsilon|\leqslant M_\varepsilon$，则取 $\delta=\varepsilon/2M_\varepsilon$，当 $P(A)<\delta$ 时，

$$\left|\int_A f\mathrm{d}P\right|\leqslant\int_A|f-f_\varepsilon|\mathrm{d}P+\int_A|f_\varepsilon|\mathrm{d}P<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

iii) $\Rightarrow$i) 显然．

13 定理(Radon－Nikodym) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，ν 为其上的广义测度，且 $\nu\ll P$，则存在唯一 r.v. f，f^- 可积，使

$$\nu(A)=\int_A f(\omega)P(\mathrm{d}\omega),\quad A\in\mathscr{F}\tag{13.1}$$

且这时 ν 为正测度的充要条件是 $f\geqslant0$ a.s.；ν 为有限测度的充要条件是 f 可积；ν 为 σ 有限测度的充要条件是 f 有限．

证 ν 为正有限(即有界)时，定理结论已由命题 12 证明．现考虑 ν 为正测度的情况，记

$$\mathscr{C}=\{C:\nu(C)<\infty\},$$

则 $\mathscr{C}$ 是一个对有限交和有限并封闭的集类，故可以找出 $C_n\in\mathscr{C}$，C_n 递增，且使

$$\lim_n P(C_n)=\sup\{P(C):C\in\mathscr{C}\}.\tag{13.2}$$

在每个 $C_n\setminus C_{n-1}$ 上，由命题 12，必存在 $f_n(\omega)\geqslant0$，使

$$\nu(A(C_n\setminus C_{n-1}))=\int_{A(C_n\setminus C_{n-1})}f_n\mathrm{d}P\qquad(C_0=\varnothing)$$

取 $f(\omega)=\sum_n f_n(\omega)I_{C_n\setminus C_{n-1}}(\omega)+(+\infty)I_{(\bigcup_n C_n)^c}(\omega)$．对任一$A\in\mathscr{F}$，若 $P(A(\bigcup_n C_n)^c)=0$，则由 $\nu\ll P$，必有 $\nu(A(\bigcup_n C_n)^c)=0$，

$$\nu(A)=\nu(A(\bigcup_n C_n))=\sum_n\nu(A(C_n\setminus C_{n-1}))=\sum_n\int_{A(C_n\setminus C_{n-1})}f_n\mathrm{d}P$$

$$= \int_{A(\bigcup_n C_n)} f\mathrm{d}P = \int_A f\mathrm{d}P .$$

若 $P(A(\bigcup_n C_n)^c) > 0$，则必有 $\nu(A(\bigcup_n C_n)^c) = +\infty$，否则与(13.2)矛盾．这时

$$\nu(A) = \nu(A(\bigcup_n C_n)) + \nu(A(\bigcup_n C_n)^c) = +\infty = \int_A f dP$$

故 (13.1) 成立．f 的唯一性是容易证明的．

ν 为广义测度时，对 ν^+, ν^- 分别运用已有结论即可．定理其它结论也是容易证明的．

14 定义 称 (13.1) 中规定的 f 为 ν 关于 P 的 Radon-Nikodym 导数，简称 R－N 导数，也记为 $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}P}$ 及 $\nu = f \cdot P$.

15 注 若 $(\Omega, \mathscr{F})$ 为可测空间，μ 为其上 σ 有限广义测度，ν 为广义测度，则定理 13 在这一情况下也可象命题 9 一样作类似的推广．

16 命题 若 μ, ν 为可测空间 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的 σ 有限测度，$\nu \ll \mu$．则对每个 ν 可积函数 f，有

$$\int_A f\mathrm{d}\nu = \int_A f \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} d\mu, \qquad A \in \mathscr{F}. \tag{16.1}$$

证　先设 μ 为概率测度，ν 为有限测度．记 $\mathscr{L} = \left\{ f: \int_\Omega |f| d\nu < \infty \right\}$，$\mathscr{H} = \{f: f$ 可测且 $\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu\}$，则由定理 13．$\mathscr{H} \supset \{I_A, A \in \mathscr{F}\}$．又容易验证 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$ 类，故由定理 1.4.19，对一切 ν 可积 f，成立

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu.$$

特别取 $g = fI_A$ 代入上式 f，即得 (16.1)．对 μ, ν 为 σ 有限的一般情况，可象命题 9 一样进行推广．∎

注 (16.1)式对非负可测函数 f 也成立.

17 命题 若 λ,μ,ν 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上 σ 有限测度, $\nu\ll\mu$, $\lambda\ll\nu$, 则 $\lambda\ll\mu$, 且

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}\cdot\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu},\qquad \text{a.e.}\,\mu \tag{17.1}$$

证 在(16.1)中取 $f=\dfrac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}$ 有

$$\lambda(A)=\int_A\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}\mathrm{d}\nu=\int_A\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\nu}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\mathrm{d}\mu$$

由于 A 是任意可测集, 故 $\lambda\ll\mu$, 且由 $R-N$ 导数的唯一性, (17.1)成立.

18 若 $F(x)$ 表 r.v. X 的分布函数, μ_F 表由 F 在 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{B})$ 上生成的 L—S 测度, 又 λ 表 $(\mathbf{R}^1,\mathscr{B})$ 上 Lebesgus 测度, 则 $\mu_F\ll\lambda$ 的充要条件是存在 $f\in L^1(\mathrm{d}\lambda)$, 使

$$\mu_F(B)=\int_B f(x)\lambda(\mathrm{d}x)=\int_B f(x)\mathrm{d}x,$$

$$F(x)=\int_{]-\infty,x]}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

此时, 几乎处处唯一确定的可积函数 f 称为分布密度. 在这种情况下, 若 $\mathsf{E}g(X)$ 存在, 则它可写为

$$\mathsf{E}g(X)=\int g(X)\mathrm{d}P=\int_R g(x)\mu_F(\mathrm{d}x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

19 命题 若 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为可测空间, M 表示 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上有限广义测度全体. 对 $\mu\in M$, 取 $\|\mu\|=|\mu|(\Omega)$, 则 M 在此范数下为 **Banach** 空间, 且为完备格.

证 不难直接验证 M 是线性空间及 $\|\cdot\|$ 是范数. 下面证明 M 是完备的. 若 $\{\mu_n\}$ 为基本序列, 取

$$\nu=\sum_n\frac{1}{2^n\|\mu_n\|}|\mu_n|,$$

则$\nu\in M$，且$\mu_n\ll\nu$，记$X_n=\frac{d\mu_n}{d\nu}$，则不难验证，

$$\|\mu_m-\mu_n\|=\int_\Omega |X_m-X_n|d\nu.$$

因而$\{X_n\}$是$L^1(\Omega,\mathscr{F},\nu)$中基本列，必存在$X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},\nu)$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |X_n-X|d\nu=0.$$

取$\mu(A)=\int_A Xd\nu$，则$\mu\in M$，

$$\|\mu_n-\mu\|=\int_\Omega |X_n-X|d\nu\to 0,$$

故M是完备的，是一个 Banach 空间.

在M中规定$\mu<\nu$的充要条件是对每个$A\in\mathscr{F}$有$\mu(A)\leqslant\nu(A)$，则M有序关系. 且由定义 5，$\mu_1,\mu_2\in M$时，$\mu_1\vee\mu_2,\mu_1\wedge\mu_2\in M$. 还需证明它作为格也是完备的，即有上界必有上确界. 若$\{\mu_\alpha,\alpha\in I\}$为$M$中一族元素，$\mu_\alpha<\nu,\nu\in M$，则$\mu_\alpha\ll\nu$. 记

$$X_\alpha=\frac{d\mu_\alpha}{d\nu},\qquad Y=\operatorname*{esssup}_{\alpha\in I}X_\alpha$$

$\mu=Y\cdot P$，则不难验证μ是$\{\mu_\alpha,\alpha\in I\}$的上确界，故$M$是完备的.

§2 条件期望

本节所涉及的问题都将在固定的完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上进行讨论.

一、定 义

1 设$B\in\mathscr{F}$，$P(B)>0$. 令

$$P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

固定 B 让 A 在 $\mathscr{F}$ 中变化时，条件概率 $P_B(A)$ 也是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度；若 $X(\omega)$ 为(关于 P)可积 r.v.则关于 $P_B(\cdot)$ 的期望为

$$\mathbf{E}_B(\cdot)=\int_\Omega X(\omega)P_B(\mathrm{d}\omega)=\frac{1}{P(B)}\int_B X(\omega)P(\mathrm{d}\omega).$$

设 $\{B_n,n\geqslant1\}$ 为 Ω 的可列可测分割，即 $B_n\in\mathscr{F}$，$\{B_n,n\geqslant1\}$ 互不相交，且 $\sum\limits_n B_n=\Omega$，则由全概率公式，对 $A\in\mathscr{F}$ 及 P 可积 r.v. X，有

$$P(A)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)P_{B_n}(A),$$

$$\mathbf{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n}X(\omega)P(\mathrm{d}\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)\mathbf{E}_{B_n}(X).$$

若 Y 为离散型 r.v.（至多取可列个值），$B_n=\{\omega;Y=a_n\}$，且 $\{B_n\}$ 为 Ω 的分割，则

$$\mathbf{E}(X|Y=a_n)=\mathbf{E}_{B_n}(X).$$

这是已知 $Y=a_n$ 条件下 X 的条件期望，由于 Y 本身也是随机变量，Y 的取值也随不同试验结果而不同，因而可考虑一个因 Y 取值不同而取不同数值的函数 $\mathbf{E}(X|Y)$，而

$$\mathbf{E}(X|Y)|_{Y=a_n}=\mathbf{E}_{B_n}(Y)$$

即

$$\mathbf{E}(X|Y)=\sum_n\mathbf{E}_{B_n}(X)I_{(Y=a_n)}=\sum_n\mathbf{E}_{B_n}(X)I_{B_n}(\omega),\qquad(1.1)$$

它在各种情况下都表示 X 关于 Y 的条件期望．这时，对 $C\in\sigma(Y)$，若 $C=\sum\limits_{k\geqslant1}B_{n_k}$，必有

$$\int_C\mathbf{E}(X|Y)\mathrm{d}P=\sum_k\mathbf{E}_{B_{n_k}}(X|Y)P(B_{n_k})=\sum_k\int_{B_{n_k}}X\mathrm{d}P$$

$$=\int_C X\mathrm{d}P\qquad(1.2)$$

古典的条件概率与条件期望都要求作为条件的事件有正概率，当我们要把与随机变量相联系的事件（例如 $\{Y=a\}$）作为条件时，$P(Y=a)>0$ 的要求未必能满足，因而必须改进原来的定义．由于期

望比概率更一般，我们就直接讨论条件期望 $\mathbf{E}(X|Y)$. 前面的分析启发我们，条件期望应随 Y 取值的不同而取不同数值，因而它应该是 Y 的函数，首先是个 r.v.，还要是 $\sigma(Y)$ 可测. (1.1) 表明，在古典情况下这一要求可满足. 其次，(1.2) 表明 $\mathbf{E}(X|Y)$ 应满足的关系式，这些将作为定义一般条件期望的出发点.

2 引理 若 X 为(准)可积 r.v.，$\mathscr{B}$为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，则必存在唯一(不计 a.s. 相等的差别)(准)可积 $\mathscr{B}$可测 r.v. Y，满足

$$\int_B Y\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P, \qquad \forall B\in\mathscr{B}, \tag{2.1}$$

或等价地，对每个有界 $\mathscr{B}$ 可测 r.v. Z，成立

$$\int_\Omega ZY\,\mathrm{d}P=\int_\Omega ZX\,\mathrm{d}P. \tag{2.2}$$

证 (2.1) 和 (2.2) 的等价是显然的. 由 X 为(准)可积可知，若令

$$\nu(B)=\int_B X\mathrm{d}P, \qquad B\in\mathscr{B}$$

则 ν 是 $(\Omega, \mathscr{B})$上的广义测度（注意在 $\mathscr{B}$ 上而不是在 $\mathscr{F}$ 上!)，且 $\nu\ll P$，故由 Radon—Nikodym 定理，存在唯一 (不计 a.s. 相等的差别)的 $\mathscr{B}$可测 $R-N$ 导数，若记它为 Y，则

$$\nu(B)=\int_B Y\mathrm{d}P, \qquad B\in\mathscr{B},$$

故 (2.1) 成立. 此外由于 $\{Y>0\}\in\mathscr{B}$，故

$$\int_\Omega Y^{-}\mathrm{d}P=\int_{Y>0} Y\mathrm{d}P=\int_{Y>0} X\mathrm{d}P\leqslant\int_{Y>0} X^{+}\mathrm{d}P\leqslant\int_\Omega X^{+}\mathrm{d}P$$

同样

$$\int_\Omega Y^{-}\mathrm{d}P\leqslant\int_\Omega X^{-}\mathrm{d}P.$$

故当 X 可积或准可积时，Y 亦可积或准可积.

3 定义 设$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，X 为(准)可积 r.v.，Y 为满足下列条件的 r.v.：

i) Y 为$\mathscr{B}$可测的；

ii) 对每个$B\in\mathscr{B}$，$\int_B Y\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P$，

则称Y为X关于$\mathscr{B}$的条件期望，记为$\mathbf{E}(X|\mathscr{B})$。特别地，当$\mathscr{B}=\sigma(Z)$时，则也称$Y$为$X$关于$Z$的条件期望，记为$\mathbf{E}(X|Z)$。

由于$\mathbf{E}(X|Z)$关于$\sigma(Z)$可测，由命题1.4.24，必有Borel可测函数g使$\mathbf{E}(X|Z)=g(Z)$，这时$g(a)$也称为$Z=a$条件下X的条件期望。

由引理2可知，X关于$\mathscr{B}$的条件期望是存在的，且不计a.s.相等的差别时，它是唯一的：$\mathbf{E}(X|\mathscr{B})=\left.\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{B}}$，其中$\nu(B)=\int_B X\mathrm{d}P$。

4 例 设X准可积，若$\mathscr{B}=\{\varnothing,\Omega\}$，则$\mathbf{E}(X|\mathscr{B})=\mathbf{E}X$，所以期望也是条件期望的特例。

若$\mathscr{B}=\mathscr{F}$，则$\mathbf{E}(X|\mathscr{B})=X$。

若$\{A_n,n\geqslant1\}$为Ω的一个可测分割，$\mathscr{B}=\sigma\{A_n,\ n\geqslant1\}$，则容易验证

$$\mathbf{E}(X|\mathscr{B})=\sum_n\frac{1}{P(A_n)}\int_{A_n}X\mathrm{d}P\cdot I_{A_n}(\omega),$$

所以定义3可看作为经典情况的推广。

5 定义 设$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的子σ域，$A\in\mathscr{F}$，则$\mathbf{E}(I_A|\mathscr{B})$也称为$A$关于$\mathscr{B}$的条件概率，记为$P(A|\mathscr{B})$。

由定义3可知，$P(A|\mathscr{B})$必满足：

i) $P(A|\mathscr{B})$是$\mathscr{B}$可测的；

ii) 对每个$B\in\mathscr{B}$，$P(AB)=\int_B P(A|\mathscr{B})\mathrm{d}P$，

且$P(A|\mathscr{B})$是存在唯一的(若不计a.s.相等的差别)。

6 条件期望的概念还可以用于比可积r.v.更广的一类r.v.。一是对非负的或准可积r.v.，这在上面已经做到了。另一是对所谓关于$\mathscr{B}$为σ可积的r.v.。r.v.X称为关于$\mathscr{B}$为σ可积的，若存在Ω的$\mathscr{B}$可测

分割 $\{B_n,\ n\geqslant 1\}$. 对每个 n, $I_{B_n}X$ 是可积的. 这时也必存在 $\mathscr{B}$ 可测 a.s. 有限 r.v. Y, 使对每个 n 及 $B\in\mathscr{B}$ 成立 $\mathbf{E}(I_{BB_n}X)=\mathbf{E}(I_{BB_n}\cdot Y)$. 这一 Y 也称为 X 关于 $\mathscr{B}$ 的条件期望, 记为 $E(X|\mathscr{B})$, 且不计 a.s. 相等的差别时, 它是唯一的.

二、性　　质

以下 $\mathscr{B},\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 等都是指 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域, 且我们讨论可积 r.v. 的条件期望, 这些性质大多数不难推广到准可积和 σ 可积的情形.

7　命题　i) 若 X,Y 为可积 r.v., α,β 为任意常数, 则

$$\mathbf{E}(\alpha X+\beta Y\,|\,\mathscr{B})=\alpha\mathbf{E}(X|\mathscr{B})+\beta\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})\quad \text{a.s.};\qquad (7.1)$$

ii) $\mathbf{E}(1|\mathscr{B})=1$　a.s.;

iii) 若 $X\geqslant Y$, 则 $\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\geqslant\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})$　a.s.. 特别当 $X\geqslant 0$, $\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\geqslant 0$. $|\mathbf{E}(X|\mathscr{B})|\leqslant\mathbf{E}(|X|\,|\mathscr{B})$.

证　i) 首先 (7.1) 两端都是 $\mathscr{B}$ 可测的, 且对任一 $B\in\mathscr{B}$, 有

$$\int_B \mathbf{E}(\alpha X+\beta Y\,|\,\mathscr{B})\mathrm{d}P=\int_B(\alpha X+\mathscr{B}Y)\mathrm{d}P=\alpha\int_B X\mathrm{d}P+\beta\int_B Y\mathrm{d}P$$

$$=\alpha\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\mathrm{d}P+\beta\int_B\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})\mathrm{d}P=\int_B[\alpha\mathbf{E}(X|\mathscr{B})+\beta\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})]\mathrm{d}P$$

故 (7.1) 成立. ii) 亦可类似地按定义验证. iii) $\mathbf{E}(X|\mathscr{B})$, $\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})$ 都是 $\mathscr{B}$ 可测的, 且对任一 $B\in\mathscr{B}$, 有

$$\int_B\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P\geqslant\int_B Y\mathrm{d}P=\int_B\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})\mathrm{d}P$$

因而 $\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\geqslant\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})$ a.s.. 又因 $-|X|\leqslant X\leqslant|X|$, 故

$$-\mathbf{E}(|X|\,|\mathscr{B})\leqslant\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\leqslant\mathbf{E}(|X|\,|\mathscr{B})$$

即 $|\mathbf{E}(X|\mathscr{B})|\leqslant\mathbf{E}(|X|\,|\mathscr{B})$ a.s..

由于条件期望只是在 a.s. 相等意义下为唯一的, 因而涉及条件期望的关系式也只能是在以概率 1 意义下成立, 所以, 以后我们不再一一注明, 并将 a.s. 成立这一说明也省略了.

8　命题　设 Y 为可积 r.v., $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为 r.v. 序列, 则

i) (条件期望的 Levi 引理)若 $Y\leqslant X_n\uparrow X$,则

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})=\mathsf{E}(X|\mathscr{B}); \tag{8.1}$$

若 $Y\geqslant X_n\downarrow X$,则 (8.1) 也成立.

ii) (条件期望的 Fatou 引理)若 $X_n\geqslant Y$,则

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n|\mathscr{B})\leqslant\varliminf_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B});$$

若 $X_n\leqslant Y$,则 $\mathsf{E}(\varlimsup_n X_n|\mathscr{B})\geqslant\varlimsup_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})$.

iii) (条件期望的 Lebesgue 控制收敛定理)若 $|X_n|\leqslant Y$, $X_n\to X$ a.s. 则 $\lim_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})=\mathsf{E}(X|\mathscr{B})$a.s..

证 i)由命题 7, $\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})$随 n 递增,若$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\uparrow Z$,则 $Z\in\mathscr{B}$.因为 $\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\geqslant\mathsf{E}(Y|\mathscr{B})$,由通常积分的 Lévi 引理,对每个 $B\in\mathscr{B}$,有

$$\int_B Z\mathrm{d}P=\int_B\lim_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\mathrm{d}P=\lim_n\int_B\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\mathrm{d}P$$

$$=\lim_n\int_B X_n\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P.$$

故 $Z=\mathsf{E}(X|\mathscr{B})$,类似地可证递减的情况.

ii) 记 $Y_n=\inf_{k\geqslant n}X_k$, 则$Y\leqslant Y_n\uparrow\varliminf_n X_n$, 且$\mathsf{E}(Y_n|\mathscr{B})\leqslant\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})$. 故由 i),

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n|\mathscr{B})=\lim_n\mathsf{E}(Y_n|\mathscr{B})\leqslant\varliminf_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B}).$$

同样可得关于上限的不等式.

iii) 由 ii),

$$\mathsf{E}(X|\mathscr{B})=\mathsf{E}(\varliminf_n X_n|\mathscr{B})\leqslant\varliminf_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\leqslant\varlimsup_n\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})$$

$$\leqslant\mathsf{E}(\varlimsup_n X_n|\mathscr{B})=\mathsf{E}(X|\mathscr{B}),$$

故 iii) 成立.

9 命题 i) 若 Y 为 $\mathscr{B}$ 可测 r.v.,且 X,XY 可积,则

$$\mathsf{E}(XY|\mathscr{B})=Y\,\mathsf{E}(X|\mathscr{B}), \tag{9.1}$$

特别地 $\mathsf{E}(Y|\mathscr{B})=Y$;

ii) $\mathscr{B}_1$ 为$\mathscr{B}$ 的子 σ 域,X 为可积 r.v.,则

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}_1)|\mathscr{B})=\mathbf{E}(X|\mathscr{B}_1)=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{B})|\mathscr{B}_1); \quad (9.2)$$

iii) 若 X 为可积 r.v.,$\sigma(X)$ 与$\mathscr{B}$ 独立,则 $\mathbf{E}(X|\mathscr{B})=\mathbf{E}X$. 特别当 X,Y 相互独立时,$\mathbf{E}(X|Y)=\mathbf{E}X$.

证 **i)** 记

$$\mathscr{L}=\{Y:Y\in\mathscr{B},\mathbf{E}|YX|<\infty\},$$

$$\mathscr{H}=\{Y:Y\in\mathscr{L},\mathbf{E}(YX)=\mathbf{E}(Y\,\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))\},$$

则由条件期望的定义,$\mathscr{H}\supset\{I_A:A\in\mathscr{B}\}$,又容易直接验证$\mathscr{H}$ 是一个 $\mathscr{L}$ 类,所以由单调类定理 1.4.19,$\mathscr{H}\supset\mathscr{L}$,即 **i)** 成立.

ii) 因 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$,$\mathbf{E}(X|\mathscr{B}_1)\in\mathscr{B}$, 故由 **i)** (9.2) 第一个等式成立. 另一方面,对每个 $B\in\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$,

$$\int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{B}_1)\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P=\int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{B})\mathrm{d}P=\int_B\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{B})|\mathscr{B}_1)\mathrm{d}P,$$

故 (9.2) 成立.

iii) 对 $B\in\mathscr{B}$,由 I_B 与 X 独立有

$$\int_B \mathbf{E}(X|\mathscr{B})\mathrm{d}P=\int_B X\mathrm{d}P=\mathbf{E}(I_BX)=P(B)\mathbf{E}(X)=\int_B \mathbf{E}(X)\mathrm{d}P.$$

故 **iii)** 成立.

10 命题 (Jensen 不等式) 若 X 及 $\varphi(X)$ 为可积 r.v., $\varphi(x)$ 为有限下凸函数,则

$$\varphi(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))\leqslant\mathbf{E}(\varphi(X)|\mathscr{B}). \quad (10.1)$$

证 由 φ 是下凸的,因而对任一 s,有

$$\varphi(t)-\varphi(s)\geqslant\varphi'_-(s)(t-s), \qquad t\in\,]-\infty,\infty[,$$

其中 φ'_- 表 φ 的左导数,它是 s 的 Borel 可测函数. 令

$$t=X, \quad s=\mathbf{E}(X|\mathscr{B}),$$

代入上式,有

$$\varphi(X)-\varphi(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))\geqslant\varphi'_-(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))(X-\mathbf{E}(X|\mathscr{B})).$$

对上式两端取条件期望 $\mathbf{E}(\cdot|\mathscr{B})$并利用命题 9,有

$$\mathbf{E}(\varphi(X)|\mathscr{B}))-\varphi(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))$$
$$\geqslant\varphi'_-(\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))(\mathbf{E}(X|\mathscr{B})-\mathbf{E}(X|\mathscr{B}))=0.$$

11　系　若 $p \geqslant 1$, $X \in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$，则 $\mathbf{E}(X|\mathscr{B}) \in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$，且

$$\|\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\|_p \leqslant \|X\|_p. \tag{11.1}$$

证　取 $\varphi(t)=|t|^p$，由 (10.1)，

$$|\mathbf{E}(X|\mathscr{B})|^p \leqslant \mathbf{E}(|X|^p|\mathscr{B}).$$

取期望并开 p 次方，即得 (11.1)．■

12　命题　若 $p \geqslant 1$，对 $X \in L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$，$TX \triangleq \mathbf{E}(X|\mathscr{B})$，则 T 是 $L^p(\Omega,\mathscr{F},P)$ 的幂等映照 $(T^2=T)$ 且 $\|T\| \leqslant 1$．特别地 $p=2$ 时，T 是 $L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$ 到 $L^2(\Omega,\mathscr{B},P)$ 的投影算子．

证　命题前一半是容易直接验证的．对 $p=2$，只要验证 T 是自共轭的．设 $X,Y \in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$，则

$$\begin{aligned}(TX,Y)&=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{B})Y)=\mathbf{E}(\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|\mathscr{B})Y|\mathscr{B}])\\ &=\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|\mathscr{B})\mathbf{E}(Y|\mathscr{B}))=\mathbf{E}(\mathbf{E}[X\,\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})|\mathscr{B}])\\ &=\mathbf{E}[X\,\mathbf{E}(Y|\mathscr{B})]=(X,TY),\end{aligned}$$

因而 T 是一个投影算子，且容易验证 T 的值域为 $L^2(\Omega,\mathscr{B},P)$．

13　系　若 $Y \in L^2(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\{X_t, t\in T\}$ 为一族 r.v.，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(|Y-\mathbf{E}(Y|X_t,t\in T)|^2\\ &=\min\{\mathbf{E}(Y-Z)^2: Z\in L^2(\Omega,\sigma(X_t,t\in T),P)\},\end{aligned}$$

即 $\mathbf{E}(Y|X_t,t\in T)$ 是 $\{X_t,t\in T\}$ 对 Y 均方误差最小的（非线性）预测（估计）．

14　命题　条件概率 $P(A|\mathscr{B})$ 作为 A 的函数，具有下列性质：

i) $P(\Omega|\mathscr{B})=1$ a.s.;

ii) $P(A|\mathscr{B}) \geqslant 0$ a.s.;

iii) 对互不相交的事件列 $\{A_n\}$，$P(\sum\limits_n A_n|\mathscr{B})=\sum\limits_n P(A_n|\mathscr{B})$ a.s.

证　这是命题 7 和 8 的直接推论．

三、　条件概率分布

15　定义　设 $\mathscr{F}_1$，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域．$\Omega\times\mathscr{F}_1$ 上函数 $P(\omega, A)$ 若满足：

i) 对每个 $\omega\in\Omega$，$P(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{F}_1$ 上概率测度；

ii) 对每个 $A\in\mathscr{F}_1$, $P(\cdot,A)$ 是 $(\Omega,\mathscr{B})$ 上可测函数，且

$$P(\omega,A)=P(A|\mathscr{B})\quad \text{a.s.},$$

则称 $P(\omega,A)$ 为 $\mathscr{F}_1$ 上关于 $\mathscr{B}$ 的(正则)条件概率分布.

16 例 若 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 为 Ω 的可测分割，$\mathscr{B}=\sigma(A_n,n\geqslant1)$，取

$$P(\omega,A)=\begin{cases}P(AA_n)/P(A_n), & \omega\in A_n \text{且} P(A_n)>0;\\ P(A) & \omega\in A_n\text{且} P(A_n)=0,\end{cases}$$

则容易验证 $P(\omega,A)$ 是 $\mathscr{F}$ 上关于 $\mathscr{B}$ 的条件概率分布.

17 例 若 $\Omega=[0,1]$，$\mathscr{B}$ 为 $[0,1]$ 中 Borel 点集全体，m 为 Lebesgue 测度. M 表示 $[0,1]$ 中满足 $m^*(M)=m^*(M^c)=1$ 的 Lebesgue 不可测集. 又令

$$\mathscr{F}=\sigma(M,\mathscr{B})=\{AM+BM^c,A,B\in\mathscr{B}\}$$
$$P(AM+BM^c)=m(A)$$

则可以验证 P 在 $\mathscr{F}$ 上是完全确定的. $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，且 $P(M)=1$, $P(M^c)=0$, $P|_{\mathscr{B}}=m$. 下面我们要说明不存在关于 $\mathscr{B}$ 的条件概率分布. 若不然，以 $P(\omega,A)$ 表示这一条件概率分布. 首先由

$$\int_B P(M^c|\mathscr{B})\mathrm{d}P=P(M^cB)=0,B\in\mathscr{B}$$

存在可略集 N_0，使 $\omega\in N_0^c$ 时有

$$P(\omega,M^c)=0. \tag{17.1}$$

对实数 r_1,r_2，由 $]r_1,r_2]\in\mathscr{B}$，所以 $P(]r_1,r_2]|\mathscr{B})=I_{]r_1,r_2]}$ a.s.，从而存在可略集 N_{r_1,r_2}，使 $\omega\in N_{r_1,r_2}^c$ 时，有

$$P(\omega,]r_1,r_2])=I_{]r_1,r_2]}. \tag{17.2}$$

取 $N=N_0\bigcup(\bigcup_{r_1,r_2\in Q}N_{r_1,r_2})$，其中 Q 表示 $[0,1]$ 中的有理数全体，则 N 为可略集，且当 $\omega\in N^c$ 时，(17.1)，(17.2)同时成立，进而由单调类定理，

$$P(\omega,B)=I_B,B\in\mathscr{B},\ \omega\in N^c;$$
$$P(\omega,M^c)=0,\ \omega\in N^c.$$

由于 $m^*(M^c)=1$ 故 N^cM^c 非空. 当 $\omega\in N^cM^c$ 时，

* 关于这一 M 的存在性可参见 P. R. Halmos "Measure Theory" (1950) §16 定理 E.

$$0=P(\omega,M^c)\geqslant P(\omega,\{\omega\})=1$$

这一矛盾表明不存在条件概率分布．

18 定义 设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 或 $(X_1,\cdots,X_n,\cdots)$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机向量或随机序列，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，$\mathscr{B}^n$ 表示 R^n 中 Borel 集全体．$\Omega\times\mathscr{B}^n$，$1\leqslant n\leqslant\infty$ 上函数 $P_X(\omega,A)$ 若满足：

i) 对每个 ω，$P_X(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}^n$ 上概率测度；

ii) 对每个 $A\in\mathscr{B}^n$，$P_X(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{B}$ 可测的，且

$$P_X(\omega,A)=P(X^{-1}(A)|\mathscr{B})\ \text{a.s.},$$

则称 $P_X(\omega,A)$ 为 X 关于 $\mathscr{B}$ 的（正则）条件概率分布．

19 命题（Doob） 若 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机向量，$\mathscr{B}$ 为子 σ 域，则存在 X 关于 $\mathscr{B}$ 的条件概率分布．

证 对任意有理数 λ_i，$1\leqslant i\leqslant n$，令

$$F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=P(\bigcap_{i=1}^n[X_i\leqslant\lambda_i]|\mathscr{B})(\omega) \tag{19.1}$$

利用命题 14 及有理数的可列性，必存在可略集 N，当 $\omega\in N^c$ 时，对一切有理数 $\lambda_i,\lambda_i',r_{im}$，下式同时成立：

$$F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\leqslant F_n^\omega(\lambda_1',\cdots\lambda_n'),\ \text{若}\ \lambda_i\leqslant\lambda_i',1\leqslant i\leqslant n; \tag{19.2}$$

$$F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\lim_{r_{im}\downarrow\lambda_i,1\leqslant i\leqslant n}F_n^\omega(r_{1m},\cdots,r_{nm}); \tag{19.3}$$

$$\lim_{\substack{\lambda_i\to+\infty\\1\leqslant i\leqslant n}}F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=1,\ \lim_{\lambda_i\to-\infty}F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0,1\leqslant i\leqslant n, \tag{19.4}$$

$$\triangle_n\lambda,\lambda'F_n^\omega\geqslant0,\ \lambda_i\leqslant\lambda_i',\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{19.5}$$

其中 $\triangle_n\lambda,\lambda'F_n^\omega$ 表示 F_n^ω 在以 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ 及 $\lambda'=(\lambda_1',\cdots,\lambda_n')$ 为端点的立方体上的差分．进而对 $\omega\in N^c$ 及一切实数 x_i，令

$$F_n^\omega(x_1,\cdots,x_n)=\lim_{\substack{\lambda_i\downarrow x_i\\1\leqslant i\leqslant n}}F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \tag{19.6}$$

而当 $\omega\in N$ 时，令

$$F_n^\omega(x_1,\cdots,x_n)=P(\bigcap_{i=1}^n[X_i\leqslant x_i]) \tag{19.7}$$

由此对每个$\omega\in\Omega$，F_n^ω是n维分布函数，因而可在$(\mathbf{R}^n,\mathscr{B}^n)$上规定$L$-$S$测度$\mu_\omega$，它是一个概率测度。令

$$P_X(\omega,A)=\mu_\omega(A),A\in\mathscr{B}^n,\ \omega\in\Omega.$$

若记

$$\mathscr{S}=\{A:A\in\mathscr{B}^n,P_X(\omega,A)\quad\mathscr{B}\text{可测且}$$
$$P_X(\omega,A)=P(X^{-1}(A)|\mathscr{B})\text{a.s.}\},$$

$$\mathscr{C}=\{B:B=\mathop{\times}_{i=1}^{n}[-\infty,\lambda_i],-\infty<\lambda_i<-\infty,1\leqslant i\leqslant n,$$

λ_i为有理数}，

则$\mathscr{S}$为λ类，$\mathscr{C}$为π类，$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}^n$，且由(19.1)$\mathscr{S}\supset\mathscr{C}$，因而$\mathscr{S}=\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}^n$。所以，$P_X$是$X$关于$\mathscr{B}$的(正则)条件概率分布.

20 命题 若$X=\{X_n,n\geqslant1\}$为r.v.序列，$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的子σ域，则存在X关于$\mathscr{B}$的正则条件概率分布.

证 对每个n及有理数λ_i，如(19.1)选$F_n^\omega(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$，如命题18的证明一样，有可略集$N$，使$\omega\in N^c$时(19.2)—(19.4)成立，且

$$\lim_{\lambda_{n+1}\to\infty}F_{n+1}^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})=F_n^\omega(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ (n\geqslant1)\qquad(20.1)$$

再按(19.6)和(19.7)规定分布族$\{F_n^\omega,n\geqslant1\}$。由(20.1)，它必是相容分布族，因而由Колмогоров定理2.5.17，必可由此分布族生成$(\mathbf{R}^\infty,\mathscr{B}^\infty)$上测度$\mu_\omega$。令$P_X(\omega,A)=\mu_\omega(A),A\in\mathscr{B}^\infty$，则象命题19的证明一样，可以证明$P_X(\omega,A)$是$X$关于$\mathscr{B}$的(正则)条件概率分布。

21 命题 设$X=(X_1,\cdots,X_n,\cdots)$或$(X_n,n\geqslant1)$为随机向量或r.v.序列，$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的子$\sigma$域。若$X$的值域$\{X(\omega);\omega\in\Omega\}$为Borel集，则存在$\sigma(X)$上关于$\mathscr{B}$的条件概率分布.

证 记$P_X(\omega,A)$为X关于$\mathscr{B}$的正则条件概率分布，令

$$S=\{X(\omega);\omega\in\Omega\},$$

则存在可略集N，当$\omega\in N^c$时，有

$$P_X(\omega,S)=P(X^{-1}(S)|\mathscr{B})(\omega)=P(\Omega|\mathscr{B})(\omega)=1.$$

若$B\in\sigma(X)$，$B=X^{-1}(A_1)=X^{-1}(A_2)$，$A_1,A_2\in\mathscr{B}^n$，则$A_1\triangle A_2\in S^c$，

因而

$$P_X(\omega, A_1) = P_X(\omega, A_1 A_2) = P_X(\omega, A_2), \omega \in N^c.$$

因此，对$B \in \sigma(X)$，若 $B = X^{-1}(A)$，可以完全确定地规定 $P(\omega, B)$ 如下：

$$P(\omega, B) = \begin{cases} P_X(\omega, A), & \omega \in N^c; \\ P_X(\omega_0, A), & \omega \in N, \end{cases}$$

其中 ω_0 为 N 中任一固定元素，于是容易验证 $P(\omega, B)$ 是 $\sigma(X)$ 上关于 $\mathscr{B}$ 的条件概率分布.

22 命题 i) 若 $P(\omega, A)$ 为 $\mathscr{F}$ 上关于$\mathscr{B}$ 的条件概率分布，$Y = Y(\omega)$ 为 $\mathscr{F}_1$ 可测准可积 r.v.，则

$$\mathbf{E}(Y|\mathscr{B}) = \int_\Omega Y(\omega')P(\omega, \mathrm{d}\omega'), \quad \text{a.s.} \tag{22.1}$$

ii) 若 X 为 n 维随机向量(或 r.v. 序列)，$P_X(\omega, A)$ 为 X 关于$\mathscr{B}$ 的正则条件概率分布，h 为 Borel 函数，$h(X)$ 准可积，则

$$\mathbf{E}(h(X)|\mathscr{B}) = \int_{R^n} h(x)P_X(\omega, \mathrm{d}x) \quad \text{a.s.}$$

证 i) 令 $\mathscr{L} = \{Y: Y \text{ 为可积 r.v.}\}$,

$$\mathscr{H} = \{Y: Y \text{ 为 } \mathscr{F}_1 \text{ 可测可积；且 } \mathbf{E}(Y|\mathscr{B}) = \int_\Omega Y(\omega')P(\omega, \mathrm{d}\omega') \text{ a.s.}\},$$

则 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{L}$ 类，且由条件概率分布定义，$\mathscr{H} \supset \{I_A, A \in \mathscr{F}_1\}$，因而由单调类定理，$\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(I_A, A \in \mathscr{F}_1) = \mathscr{F}_1$可测可积函数全体，即对 $\mathscr{F}_1$ 可测可积 r.v.(22.1) 成立．利用单调收敛定理可知(22.1) 对非负 $\mathscr{F}_1$ 可测 r.v. 也是成立的，因而对 $\mathscr{F}_1$ 可测准可积 r.v. Y(22.1) 也是成立的.

ii) 与 i) 一样证明.

23 例 若 $X = (X_1, X_2)$ 为 $(\mathbf{R}^2, \mathscr{B}^2, P)$ 上标准 r.v.，且其分布函数 F 绝对连续，即

$$F(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} f(s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \qquad (x_1,x_2), \in R^2,$$

其中分布密度为 Borel 可测的. 若令

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,t)\mathrm{d}t, \qquad f_2(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s,x_2)\mathrm{d}s,$$

$$f_1(x_1|x_2)=\begin{cases} f(x_1,x_2)/f_2(x_2), & f_2(x_2)>0; \\ f_1(x_1), & f_2(x_2)=0, \end{cases}$$

则 f_1, f_2 为 $\mathbf{R}^1$ 上 Borel 函数, $f_1(x_1|x_2)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上 Borel 函数. 若 $B\in\mathscr{B}^2$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$, 令

$$P(x,B)=\int_{\{s:(s,x_2)\in B\}} f_1(s|x_2)\mathrm{d}s,$$

则对个每 $x\in\mathbf{R}^2$, $P(x,B)$ 是 $\mathscr{B}^2$ 上概率测度. 对每个 $B\in\mathscr{B}^2$, $P(x,\mathscr{B})$ 为 x_2 的 Borel 函数, 因而是 $\sigma(X_2)$ 可测的, 而且对 $B\in\mathscr{B}^2$,

$$A_2=\mathbf{R}\times B_2\in\sigma(X_2),$$

有

$$\begin{aligned}
\int_{A_2} p(X,B)\mathrm{d}P &= \int_{B_2}\int_{-\infty}^{\infty} P((s,t),B)f(s,t)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{B_2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\int_{\{u:(u,t)\in B\}} f_1(u|t)\mathrm{d}u\Big]f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{B_2}\int_{\{u(u,t)\in B\}} f_1(u|t)f_2(t)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{B_2}\int_{\{u:(u,t)\in B\}} f(u,t)dudt \\
&= \int_{B_2}\int_{-\infty}^{\infty} I_B f(u,t)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = P(BA_2) = \int_{A_2} P(B|X_2)\mathrm{d}P
\end{aligned}$$

因而 $P(x,\ B)=P(B|X_2)(x)$ a.e., 所以 $P(x,\ B)$ 是 X 关于 X_2 的(正则)条件概率分布. 由命题 22 还进一步可得, 对可积

$$Y=h(X_1,X_2),$$

有

$$\mathbf{E}\{h(X_1,X_2)|X_2\}=\int_{-\infty}^{\infty}h(s,X_2)f_1(s|X_2)\mathrm{d}s.$$

上述 $f_1(x_1|x_2)$ 又称为 $X_2=x_2$ 时 X_1 的条件分布密度，而上式正是用条件分布密度来计算条件期望的公式. 类似地还可有 X_2 关于 X_1 的条件分布密度.

四、条件独立性

24 定义 $\mathscr{B},\mathscr{B}_t(t\in T)$都是$\mathscr{F}$的子 σ 域，若对 T 的任一有限子集 I 及任一 $B_t\in\mathscr{B}_t,t\in I$ 成立

$$P(\bigcap_{t\in I}B_t|\mathscr{B})=\prod_{t\in I}P(B_t|\mathscr{B})\quad \text{a.s.},$$

则称 $\{\mathscr{B}_t,t\in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件独立的.

显然，若$\mathscr{B}=\{\varnothing,\Omega\}$，则 $\{\mathscr{B}_t,t\in T\}$ 关于$\mathscr{B}$的条件独立性就等价于 $\{\mathscr{B}_t,t\in T\}$ 为独立的.

类似于独立性，下列事实是等价的. 若 I 表示 T 的有限子集，

i) $\mathscr{B}_t=\sigma(\mathscr{C}_t)$，对每个 $t\in T$，$\mathscr{C}_t$为 π 类，当 $C_t\in\mathscr{C}_t$有

$$P(\bigcap_{t\in I}C_t|\mathscr{B})=\prod_{t\in I}P(C_t|\mathscr{B})\quad \text{a.s.},$$

ii) $\{\mathscr{B}_t,t\in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 为条件独立的，

iii) 对每个有界 r.v. $X_t\in\mathscr{B}_t$ 有

$$\mathbf{E}(\prod_{t\in I}X_t|\mathscr{B})=\prod_{t\in I}\mathbf{E}(X_t|\mathscr{B})\quad \text{a.s.}.$$

25 命题 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 关于$\mathscr{B}$条件独立的充要条件是对任一$B_1\in\mathscr{B}_1$有

$$P(B_1|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)=P(B_1|\mathscr{B})\ \text{a.s.} \tag{25.1}$$

证 $\Leftarrow$若 $B_2\in\mathscr{B}_2$，则

$$P(B_1B_2|\mathscr{B})=\mathbf{E}(I_{B_1}I_{B_2}|\mathscr{B})=\mathbf{E}(I_{B_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\beta_2)|\mathscr{B})$$
$$=\mathbf{E}(I_{B_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})|\mathscr{B})=P(B_1|\mathscr{B})P(B_2|\mathscr{B})\quad \text{a.s.}.$$

$\Rightarrow$类似于上式，有

$$\mathbf{E}(I_{B_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)|\mathscr{B})=P(B_1B_2|\mathscr{B})=P(B_1|\mathscr{B})P(B_2|\mathscr{B})$$
$$=\mathbf{E}(I_{B_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})|\mathscr{B}).$$

所以对任一 $B\in\mathscr{B}$，有

$$\int_B I_{B_1}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)\mathrm{d}P=\int_B I_{B_1}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})\mathrm{d}P,$$

$$\int_{BB_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)\mathrm{d}P=\int_{BB_2}\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})dP. \tag{25.2}$$

记 $\mathscr{S}=\{A:A\in\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2\int_A\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)\mathrm{d}P=\int_A\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})dP\}$，则 $\mathscr{S}$ 是一个 λ 类. 由 (25.2) $\mathscr{S}\supset\mathscr{C}=\{BB_2: B\in\mathscr{B}, B_2\in\mathscr{B}_2\}$，$\mathscr{C}$ 为 π 类，$\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$. 所以由单调类定理 $\mathscr{S}=\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$. 因而对每个 $A\in\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$，有

$$\int_A\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)\mathrm{d}P=\int_A\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})\mathrm{d}P.$$

由于 $\mathbf{E}(I_{B_1}|\mathscr{B})\in\mathscr{B}\subset\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$，所以 (25.1) 成立. #

26 系 下列任一条件都是 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件独立的充要条件：

i) 对每个 $B_1\in\mathscr{B}_1$，$P(B_1|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)=P(B_1|\mathscr{B})$ a.s.；

ii) 对每个 $B_2\in\mathscr{B}_2$，$P(B_2|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_1)=P(B_2|\mathscr{B})$ a.s..

27 系 若 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2$ 独立，则 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件独立的.

证 对每个 $B_1\in\mathscr{B}_1$，

$$P(B_1|\mathscr{B}\vee\mathscr{B}_2)=P(B_1)=P(B_1|\mathscr{B})\ \text{a.s.}\ \#$$

§3 鞅的定义与基本不等式

本节和下一节的内容都是在固定的完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上讨论的，而且还假定存在 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域流

$$\mathbf{F}=(\mathscr{F}_n,n\in N),\ N=\{0,1,2,\cdots\}.$$

以后大部分内容也都是在带流概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{F},P)$ 上讨论的.

一、定义与基本性质

1 定义 随机变量序列 $X=\{X_n,n\in N\}$，若满足

i) X 是 **F** 适应的(即对每个 n, $X_n \in \mathscr{F}_n$),且对每个 n, X_n 是可积的;

ii) 对每个 $n \in N$, $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n$ a.s., 则称 X 为 **F** 鞅或鞅(若 ii) 中的=改为$\geqslant$或$\leqslant$,则 X 可相应地称为 **F** 下鞅或上鞅).

注 i) 对鞅来说,适应性是 ii) 的必然结果.

ii) 若 X 为 **F** 鞅(下鞅、上鞅), 则 X 关于其自然 σ 域流也必为鞅(下鞅、上鞅). 今后,若在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上讨论 X 而不指明 σ 域流时,就取自然 σ 域流为 σ 域流.

iii) 下列条件与 ii) 等价:对任意 $m,n \in N$,

$$\mathbf{E}(X_{m+n}|\mathscr{F}_n)=X_n \ (\geqslant 或 \leqslant) \ \text{a.s.}.$$

iv) 对于鞅, $\mathbf{E}X_n=\mathbf{E}X_0$. 对于下鞅, $\mathbf{E}X_n\uparrow$; 对于上鞅, $\mathbf{E}X_n\downarrow$. 下鞅(或上鞅)为鞅的充要条件是 $\mathbf{E}X_n=\mathbf{E}X_0$. X 为上鞅的充要条件是 $-X$ 为下鞅, X 为鞅的充要条件是它同时为上鞅和下鞅, 所以今后只对下鞅或上鞅一种情况加以讨论.

2 例 下面一些鞅(或下鞅)的例子都是容易直接验证的:

i) 若 $Y=\{Y_n, n \in N\}$ 为相互独立适应 r.v. 序列, $\mathbf{E}Y_n=0(\geqslant 0, \leqslant 0)$, 则 $X_n=\sum_{j=0}^{n} Y_j$ 为鞅(下鞅, 上鞅), 且 $\sigma(X_j, j\leqslant n)=\sigma(Y_j, j\leqslant n)$;

ii) 若 Y 为可积 r.v., $X_n=\mathbf{E}(Y|\mathscr{F}_n)$, 则 $\{X=X_n, n \in N\}$ 为鞅;

iii) 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为相互独立适应 r.v. 序列, 且

$$\psi_n(u)=\mathbf{E}\{\exp(iu\sum_{j=0}^{n}Y_j)\}\neq 0$$

对此 u, 令

$$X_n=\exp(iu\sum_{j=0}^{n}Y_j)/\psi_n(u),$$

则 $X=\{X_n, n \in N\}$ 为鞅.

iv) 若 $\{X_n, n \in N\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列,

$$P(X_n=1)=p, \quad P(X_n=-1)=q, \quad p+q=1, \quad p\neq q,$$

$$S_n=\sum_{j=0}^{n} X_j,$$

则 $\{(q/p)^{S_n}, n\in N\}$ 为鞅;

v) 设 $\{X_n, n\in N\}$ 为相互独立 r. v. 序列, $\mathsf{E}X_n=0$, $\mathsf{E}X_n^2=\sigma_n^2$, $S_n=\sum_{j=0}^{n}X_j$, 则 $\{S_n^2, n\in N\}$ 为下鞅, $\{S_n^2-\sum_{i=0}^{n}\sigma_i^2, n\in N\}$ 为鞅.

3 **命题** i) 若 X, Y 为 $\mathbf{F}$ 鞅(下鞅), α, β 为任意常数(非负常数), 则 $\alpha X+\beta Y$ 也是 $\mathbf{F}$ 鞅(下鞅);

ii) 若 X, Y 为 $\mathbf{F}$ 下鞅, 则 $X\vee Y=\{\max(X_n, Y_n), n\in N\}$ 为下鞅.

4 **命题** i) X 为鞅, f 为下凸函数, 对每个 n, $f(X_n)$ 可积, 则 $\{f(X_n), n\in N\}$ 为下鞅;

ii) X 为下鞅, f 为非降下凸函数, 对每个 n, $f(X_n)$ 可积, 则 $\{f(X_n), n\in N\}$ 为下鞅.

证 记 $Y_n=f(X_n)$, 由 Jensen 不等式,

$$\mathsf{E}(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\mathsf{E}(f(X_{n+1})|\mathscr{F}_n)\geqslant f(\mathsf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n))$$
$$\geqslant f(X_n)=Y_n. \#$$

5 **系** 若 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅, 则 $\{|X_n|, n\in N\}$, $\{|X_n|^p, n\in N\}$ $(p\geqslant 1)$, $\{X_n\log^+X_n, n\in N\}$ (当 X 为非负鞅)可积时必是下鞅; 又若 X 为下鞅, 则 $\{X_n^+, n\in N\}$, $\{X_n\log^+X_n, n\in N\}$ (当 X 为非负下鞅)可积时必是下鞅.

二、 鞅变换与基本不等式

6 **定义** 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为可积适应序列, 且对每个 $n\in N$

$$\mathsf{E}(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=0 \quad (\geqslant 0) \quad \text{a.s.},$$

则 Y 称为鞅差(下鞅差)序列.

7 **命题** 若 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅(下鞅), $Y_n=X_n-X_{n-1}$, $n\geqslant 1$, $Y_0=X_0$, 则 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差(下鞅差)序列. 反之 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差(下鞅差)序列, $X_n=\sum_{j=0}^{n}Y_j$, 则 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅(下鞅).

证 对 $n\geqslant 0$, $\mathsf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n$ 的充要条件为

$$\mathsf{E}(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)=\mathsf{E}(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)-X_n=0. \#$$

8 **定义** 设随机序列 $V=\{V_n, n\in N\}$, 若 $V_0\in\mathscr{F}_0$, 且当 $n\geqslant 0$ 时,

$V_{n+1}\in\mathscr{F}_n$,则称 V 为可料的.

9 **定义**(鞅变换) 若 $X=\{X_n,n\in N\}$,$V=\{V_n,n\in N\}$为r.v.序列,

又
$$Z_n=X_0V_0+\sum_{j=1}^{n}V_j(X_j-X_{j-1}),\quad n\in N, \tag{9.1}$$
$Z=\{Z_n,n\in N\}$,则记 $Z=V\cdot X$.

10 **定理** 若 X 为鞅(下鞅), V 为可料的(非负可料), $Z=V\cdot X$ 可积,则 Z 也是鞅(下鞅).

证 由(9.1)可见,Z 是适应的,且 $Z_{n+1}-Z_n=V_{n+1}(X_{n+1}-X_n)$. 因而由 $V_{n+1}\in\mathscr{F}_n$,可得
$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Z_{n+1}-Z_n|\mathscr{F}_n)&=\mathsf{E}(V_{n+1}(X_{n+1}-X_n)|\mathscr{F}_n)\\&=V_{n+1}\mathsf{E}(X_{n+1}-X_n|\mathscr{F}_n)=0\quad(\geqslant 0)\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$
故 Z 是鞅(下鞅).

注 当 V 有界时,Z 必可积.

11 **系** 若 X 为鞅(下鞅), T 为停时,则 $X^T=\{X_{T\wedge n},n\in N\}$ 必是鞅(下鞅).

证 取 $V_n=I_{(n\leqslant T)}$, 则 $V_n=1-I_{(T\leqslant n-1)}\in\mathscr{F}_{n-1}$, $n\in\geqslant 1$, 所以 V 是有界、非负、可料的,而
$$(V\cdot X)_n=X_0+\sum_{j=1}^{n}(X_j-X_{j-1})I_{(j\leqslant T)}=X_{n\wedge T}=(X^T)_n,$$
所以由定理 10,X^T 是鞅(下鞅).

12 **定理**(有界停时定理) 若 $X=\{X_n,n\in N\}$为下鞅(鞅),S,T 为有界停时,且 $S\leqslant T$,则
$$\mathsf{E}(X_T|\mathscr{F}_s)\geqslant X_S\quad(=X_s)\quad \text{a.s.}. \tag{12.1}$$
证 不妨设 $S,T\leqslant k$, 取 $V_n=I_{(S<n\leqslant T)}=I_{(n\leqslant T)}-I_{(n\leqslant S)}$, 则 V 是非负有界可料的,所以 $V\cdot X$ 是下鞅(鞅), 而
$$V\cdot X=I_{(n\leqslant T)}\cdot X-I_{(n\leqslant S)}\cdot X=X^T-X^S,$$
$$(V\cdot X)_0=0,\quad (V\cdot X)_k=X_T-X_S,$$
因而有
$$\mathsf{E}(X_T-X_S)=\mathsf{E}(V\cdot X)_k\overset{\geqslant}{(=)}\mathsf{E}(V\cdot X)_0=0. \tag{12.2}$$
对任一 $A\in\mathscr{F}_S$, 取 $T'=T_A\wedge(k+1)$,$S'=S_A\wedge(k+1)$, 它们是有界停

时，且 $T'\geqslant S'$. 将 T',S' 分别置换 (12.2) 的 T,S，有

$$\mathbf{E}(X_T I_A - X_S I_A) = \mathbf{E}(X_{T'} - X_{S'}) \underset{(=)}{\geqslant} 0,$$

即
$$\mathbf{E}(X_T I_A) \underset{(=)}{\geqslant} \mathbf{E}(X_S I_A), \quad A\in\mathscr{F},$$

故 (12.1) 成立. #

13 系 设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为下鞅(鞅)，S,T 为有界停时，则

$$\mathbf{E}(X_T|\mathscr{F}_S)\geqslant X_{T\wedge S} \quad (=X_{T\wedge S}) \quad \text{a.s.}. \tag{13.1}$$

证
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_T|\mathscr{F}_S) &= \mathbf{E}(X_T I_{T\leqslant S} + X_T I_{T>S}|\mathscr{F}_S)\\ &= X_T I_{T\leqslant S} + \mathbf{E}(X_{T\vee S} I_{T>S}|\mathscr{F}_S)\\ &= X_T I_{T\leqslant S} + I_{T>S}\mathbf{E}(X_{T\vee S}|\mathscr{F}_S)\\ &\underset{(=)}{\geqslant} X_T I_{T\leqslant S} + X_S I_{T>S} = X_{T\wedge S}. \ \#\end{aligned}$$

14 系 设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为下鞅，$T\in\mathscr{T}$，则

$$\mathbf{E}|X_{T\wedge n}|\leqslant 2\mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_0, \tag{14.1}$$

$$\mathbf{E}(|X_T|I_{T<\infty})\leqslant 3\sup_n \mathbf{E}|X_n|. \tag{14.2}$$

证 因为 X 是下鞅，故 X^+ 也是下鞅.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}|X_{T\wedge n}|I_{T<\infty} \leqslant \mathbf{E}|X_{T\wedge n}| &= 2\mathbf{E}X_{T\wedge n}^+ - \mathbf{E}X_{T\wedge n}\\ &\leqslant 2\mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_0 \leqslant 3\sup_n \mathbf{E}|X_n|,\end{aligned}$$

(14.1) 得证. 在上式左端令 $n\to\infty$ 并用 Fatou 引理，即得(14.2). #

15 定理(极值不等式) $X=\{X_n, n\in N\}$ 为下鞅，则对任一 $\lambda>0$，有

$$\lambda P(\sup_{k\leqslant n} X_k\geqslant\lambda)\leqslant \int_{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k\geqslant\lambda} X_n \mathrm{d}P \tag{15.1}$$

$$\lambda P(\inf_{k\leqslant n} X_k\leqslant -\lambda)\leqslant \int_{\inf\limits_{k\leqslant n} X_k>-\lambda} X_n \mathrm{d}P - \mathbf{E}X_0 \tag{15.2}$$

$$\lambda P(\sup_{k\leqslant n} |X_k|\geqslant\lambda)\leqslant 2\mathbf{E}X_n^+ - \mathbf{E}X_0 \tag{15.3}$$

证 取 $T=\inf\{k: X_k\geqslant\lambda\}\wedge n$，则 $T\leqslant n$ 为有界停时，由定理 12

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X_n\geqslant\mathbf{E}X_T &= \int_{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k\geqslant\lambda} X_T\,\mathrm{d}P + \int_{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k<\lambda} X_T\,\mathrm{d}P\\ &\geqslant \lambda P(\sup_{k\leqslant n} X_k\geqslant\lambda) + \int_{\sup\limits_{k\leqslant n} X_k<\lambda} X_n\,\mathrm{d}P\end{aligned}$$

因而(15.1)成立．取$T=\inf\{k:X_k\leqslant-\lambda\}\wedge n$,,它也是有界停时．同样由定理12有

$$\mathsf{E}X_0\leqslant\mathsf{E}X_T=\int_{\inf\limits_{k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda}X_T\,\mathrm{d}P+\int_{\inf\limits_{k\leqslant n}X_k>-\lambda}X_T\,\mathrm{d}P$$

$$\leqslant-\lambda P(\inf_{k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda)+\int_{\inf\limits_{k\leqslant n}X_k>-\lambda}X_n\,\mathrm{d}P.$$

由此可推出(15.1)成立．(15.3)是(15.1)和(15.2)的推论．*

16 系(Колмогоров不等式的推广) 若X为鞅,$\mathsf{E}X_n^2<\infty$,则

$$P(\max_{k\leqslant n}|X_k|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\mathsf{E}X_n^2.$$

证 因为$\{X_n^2,n\in N\}$是下鞅,由(15.1),

$$P(\max_{k\leqslant n}|X_k|\geqslant\lambda)=P(\max_{k\leqslant n}X_k^2\geqslant\lambda^2)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\int_{\max\limits_{k\leqslant n}X_k^2\geqslant\lambda^2}X_n^2dp\leqslant\frac{1}{\lambda^2}\mathsf{E}X_n^2.*$$

17 定理(Doob不等式) 设$X=\{X_n,n\in N\}$为鞅或非负下鞅,记$X_n^*=\sup\limits_{k\leqslant n}|X_k|$,$X^*=\sup\limits_{n\geqslant0}|X_n|$,则

$$\|X^*\|_p\leqslant q\cdot\sup_n\|X_n\|_p,\quad p>1,\quad p^{-1}+q^{-1}=1\qquad(17.1)$$

$$\mathsf{E}X^*\leqslant\frac{e}{e-1}(1+\sup_n\mathsf{E}[|X_n|\log^+|X_n|]).\qquad(17.2)$$

证 若X为鞅,则$|X|$为非负下鞅,故只需对非负下鞅加以证明．由(15.1)

$$P(X_n^*\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{X_n^*\geqslant\lambda\}}X_n\,\mathrm{d}P,\qquad\lambda>0.$$

若$\Phi(\lambda)$为$[0,\infty]$上非负连续递增函数,$\Phi(0)=0$,且$\Phi(X_n^*)$可积,则

$$\mathsf{E}\Phi(X_n^*)=\int_0^\infty P(X^*\geqslant\lambda)\mathrm{d}\Phi(\lambda)\leqslant\int_0^\infty\Big(\frac{1}{\lambda}\int_{X_n^*>\lambda}X_n\,\mathrm{d}P\Big)\mathrm{d}\Phi(\lambda)$$

$$=\int_\Omega X_n\Big(\int_0^{X_n^*}\frac{\mathrm{d}\Phi(\lambda)}{\lambda}\Big)\mathrm{d}P.\qquad(17.3)$$

为证(17.1)不妨设 $\sup_n \|X_n\|_p<\infty$，这时$\|X_n^*\|_p\leqslant\sum_{k=1}^n\|X_k\|_p<\infty$.若取 $\Phi(\lambda)=\lambda^p, p>1$ 代入(17.3)，有

$$\mathbf{E}|X_n^*|^p=\mathbf{E}(X_n\int_0^{X_n^*}P\lambda^{p-2}\mathrm{d}\lambda)=q\mathbf{E}(X_n(X_n^*)^{p-1})$$
$$\leqslant q\|X_n\|_p\|X_n^*\|_p^{p/q}.$$

由此可得

$$\|X_n^*\|_p\leqslant q\|X_n\|_p.$$

令 $n\to\infty$ 利用 Lévi 引理，即得(17.1).

为证(17.2)，取 $\Phi(\lambda)=(\lambda-1)^+$，则

$$\mathbf{E}(X_n^*-1)\leqslant\mathbf{E}(X_n^*-1)^+\leqslant\mathbf{E}\left(X_n\int_0^{X_n^*}\frac{\mathrm{d}(\lambda-1)^+}{\lambda}\right)$$
$$=\mathbf{E}(X_n\log^+X_n^*)\leqslant\mathbf{E}(X_n\log^+X_n)+\frac{1}{e}\mathbf{E}X_n^*. \quad (17.4)$$

在上式最后一步我们利用了 $\log b\leqslant\frac{b}{\mathrm{e}}$ 及

$$a\log^+b\leqslant a\log^+a+a\log^+\frac{b}{a}\leqslant a\log^+a+\frac{b}{\mathrm{e}},\quad a>0, b>0.$$

由(17.4)可推出

$$\mathbf{E}X_n^*\leqslant\frac{e}{e-1}[1+\mathbf{E}(X_n\log^+X_n)]$$

令 $n\to\infty$，利用 Lévi 引理即得(17.2). #

18 系 设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅，$\sup_n\mathbf{E}X_n^2<\infty$，则

$$\|X_n^*\|_2^2\leqslant4\|X_n\|_2^2,\qquad \|X^*\|_2^2\leqslant4\sup_n\|X_n\|_2^2.$$

三、应　用

19 命题 Колмогоров 不等式　设 $X=\{X_n, n\geqslant1\}$ 为 F 独立 r.v.序列，$\mathbf{E}X_n=0$，$\operatorname{var}X_n=\sigma_n^2, n\geqslant1, S_n=\sum_{j=1}^nX_j$，则对任一 $\varepsilon>0$，有

$$1-\frac{\mathbf{E}(\varepsilon+X_n^*)^2}{\sum_1^n\sigma_k^2}\leqslant P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_j|\geqslant\varepsilon)}S_n^2\mathrm{d}P$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^n\sigma_k^2. \quad (19.1)$$

证 由例 2，$\{S_k,k\geqslant 1\}$ 为鞅，(19.1) 的右半不等式即 (16.1)。为证左半不等式，首先注意 $\{S_k^2-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2\ k\geqslant 1\}$是鞅，由有界停时定理，对有界停时 T，有

$$\mathsf{E}S_T^2=\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{T}\sigma_j^2\right)$$

其次令 $A=\{\max\limits_{k\leqslant n}|S_k|\geqslant\varepsilon\}$，$T=\min\{j:|S_j|\geqslant\varepsilon\}\wedge n$，则 T 为有界停时，且 $|S_T|\leqslant\varepsilon+|X_T|\leqslant\varepsilon+X_n^*$，因而有

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2P(A^c)\leqslant\mathsf{E}\left(\sum_{j=1}^{T}\sigma_j^2\right)=\mathsf{E}S_T^2\leqslant\mathsf{E}(\varepsilon+X_n^*)^2,$$

由此即得 (19.1) 的左半不等式。 *

注 命题 3.4.1 中的 (4.1) 为 (19.1) 左半不等式的特例.

20 命题 (Hâjek-Rényi-周不等式) 设 $X=\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为非负下鞅，$\{C_k\}$ 为非负常数列，则取 $C_0=0$ 有

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_kX_k\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}[C_k\mathsf{E}(X_k-X_{k-1})+(C_k-C_{k-1})^+\mathsf{E}X_{k-1}].\tag{20.1}$$

特别当 $Y=\{Y_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 独立 r.v 序列时，$\mathsf{E}Y_n=0$，$\operatorname{var}Y_n=\sigma_n^2$；又 $\{C_k\}$ 为不增非负数列，则

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_k\left|\sum_{j=1}^{n}Y_j\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n}C_j^2\sigma_j^2.\tag{20.2}$$

证 由于

$$\begin{aligned}C_kX_k&=\sum_{j=1}^{k}(C_jX_j-C_{j-1}X_{j-1})\\&\leqslant\sum_{j=1}^{k}[C_j(X_j-X_{j-1})+(C_j-C_{j-1})^+X_{j-1}],\end{aligned}$$

而上式右端为非负下鞅，故由 (15.1) 可得 (20.1)。为证 (20.2)，只需注意到 $C_k\leqslant C_{k-1}$，当 $X_k=\sum_{j=1}^{n}Y_j$ 时，$\mathsf{E}(X_n^2-X_{k-1}^2)=\sigma_k^2$，因而

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_k\left|\sum_{j=1}^{k}Y_j\right|\geqslant\varepsilon\right)\leftarrow P(\max_{1\leqslant k\leqslant n}C_k^2X_k^2\geqslant\varepsilon^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n} C_j^2 \mathrm{E}(X_j^2 - X_{j-1}^2) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{n} C_j^2 \sigma_j^2. \#$$

注 对零均值独立 r.v 序列 $\{Y_n, n\geqslant 1\}$，若 $\sum_n \frac{\mathrm{var}(Y_n)}{n^2} < \infty$，则利用这一命题可直接推出 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$ a.s..

21 例 设 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 为 i.i.d. r.v. 序列，

$$P(X_n=1)=p,\quad P(X_n=-1)=q,\quad 0<p<1,$$

$$p+q=1,\qquad S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j,\qquad n\geqslant 1.$$

$\{S_n, n\geqslant 1\}$ 常称为**随机游动**. 它可用以描述质点从原点出发，每时刻独立地以概率 p 或 q 分别向右或向左移动一格. S_n 表示时刻 n 质点的位置. 若 a, b 为有限正整数，

$$T=\inf\{n; S_n=b \text{ 或 } -a\},$$

则 T 为停时.

当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，$\{S_n, n\geqslant 1\}$，$\{S_n^2-n, n\geqslant 1\}$ 都是鞅，故由有界停时定理，

$$\mathrm{E}\, S_{T\wedge n}=0$$

$$\mathrm{E}\, S_{T\wedge n}^2=\mathrm{E}\,(T\wedge n) \tag{21.1}$$

由于 $|S_{T\wedge n}|\leqslant \max(a, b)$，故

$$\mathrm{E}\,(T\wedge n)=\mathrm{E}\, S_{T\wedge n}^2\leqslant \max(a^2, b^2)<\infty.$$

令 $n\to\infty$ 即得 $\mathrm{E}T<\infty$. 又由 Wald 等式(定理(3.4.15, 3.4.16)),

$$\mathrm{E}\, S_T=0,\qquad \mathrm{E}\, S_T^2=\mathrm{E}\, T<\infty.$$

若记 $P_{-a}=P(S_T=-a,\ T<\infty)$, $P_b=P(S_T=b, T<\infty)$，则由

$$P(T<\infty)=1,$$

可得

$$P_{-a}+P_b=1.$$

由 $\mathrm{E}\, S_T=0$，可得

$$-aP_{-a}+bP_b=0.$$

故可解得

$$P_{-a}=\frac{b}{a+b}, \qquad P_b=\frac{a}{a+b},$$

$$\mathsf{E}T=\mathsf{E}\,S_T^2=P_{-a}a^2+P_b b^2=ab.$$

当 $p\neq q$ 时，$\{S_n-n(p-q),n\geqslant 1\}$，$\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n},n\geqslant 1\right\}$ 为鞅，同样由有界停时定理，

$$\mathsf{E}\,S_{n\wedge T}=(p-q)\,\mathsf{E}\,(T\wedge n), \tag{21.2}$$

$$\mathsf{E}\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n\wedge T}}=1. \tag{21.3}$$

也由于 $|S_{n\wedge T}|\leqslant \max(a,b)$，由 (21.2) 可得 $\mathsf{E}T<\infty$，且

$$\mathsf{E}\,T=\frac{1}{p-q}\,\mathsf{E}\,S_T<\infty.$$

若同上规定 P_{-a},P_b，则由 $P(T<\infty)=1$，有

$$P_{-a}+P_b=1.$$

而由 (21.3)，令 $n\to\infty$，可得

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{-a}P_{-a}+\left(\frac{q}{p}\right)^{b}P_b=1.$$

由此可解出

$$P_{-a}=\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}, \quad P_b=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}},$$

$$\mathsf{E}T=\frac{1}{p-q}\,\mathsf{E}S_T=\frac{1}{p-q}\,(-aP_{-a}+bP_b)$$

$$=\frac{b}{p-q}-\frac{a+b}{p-q}\,\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a}-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

§4 鞅的收敛定理及应用

一、收敛定理

1 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为适应 r.v. 序列，$a<b$ 为两任意实数，令

$$T_0=0,$$
$$T_1=\inf\{n:X_n\leqslant a\},\tag{1.1}$$
$$T_2=\inf\{n:n>T_1,X_n\geqslant b\},$$
$$\cdots\cdots$$

$$T_{2j-1}=\inf\{n:n>T_{2j-2},X_n\leqslant a\},\ T_{2j}=\inf\{n:n>T_{2j-1},X_n\geqslant b\},$$

若取下确界的集合是空集，下确界约定为 $+\infty$，则由命题 3.4.4，$\{T_k,k\geqslant 0\}$ 为停时．T_1 表示 X 轨道首次小于等于 a 的时刻，T_2 为 T_1 之后 X 轨道首次达到或超过 b 的时刻．若 $T_2<\infty$，则自 T_1 到 T_2 X 的轨道穿越了 $[a,b]$ 一次．T_{2j-1} 是 T_{2j-2} 后 X 轨道首次小于等于 a 的时刻．若 $T_{2j}<\infty$，则自 T_{2j-1} 到 T_{2j} X 的轨道从 a 进入 $[a,b]$ 并穿越 $[a,b]$ 一次，称之为上穿．若以 $U_a^b(X,n)$ 表示 $(X_1,\cdots,X_n)$ 完成上穿 $[a,b]$ 的次数，则

$$\{U_a^b(X,n)\geqslant k\}=\{T_{2k}\leqslant n\}\in\mathscr{F}_n,$$
$$\{U_a^b(X,n)=k\}=\{T_{2k}\leqslant n<T_{2k+2}\}\in\mathscr{F}_n.$$

2 命题（上穿不等式） 设 $X=\{X_n,\ n\in N\}$ 为下鞅，则其上穿次数 $U_a^b(X,n)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathsf{E}\{U_a^b(X,n)\}&\leqslant\frac{1}{b-a}[\mathsf{E}(X_n-a)^+-\mathsf{E}(X_0-a)^+]\\&\leqslant\frac{1}{b-a}(\mathsf{E}X_n^++|a|)\end{aligned}\tag{2.1}$$

证 取 $\tilde{X}_n=(X_n-a)^+$，则 $\tilde{X}=\{\tilde{X}_n,n\in N\}$ 仍为下鞅，且 $U_a^b(X,n)=U_0^{b-a}(\tilde{X},n)$．若按 (1.1)，取 $\{T_j,j\geqslant 0\}$，则 $\{T_j,\ j\geqslant 0\}$ 为停时，$T_0\leqslant T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots,T_j\uparrow+\infty,j\to\infty$．

$$\tilde{X}_n-\tilde{X}_0=\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_j\wedge n}-\tilde{X}_{T_{j-1}\wedge n})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n})+\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-2}\wedge n}).$$

第一个和式中每一项都是非负的，且

$$\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n})\geqslant U_0^{b-a}(\tilde{X},n)(b-a);$$

第二个和式至多为 n 项相加，且由有界停时定理，

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-2}\wedge n})\right)\\&\quad=\sum_{j=1}^{n}(\mathrm{E}\,\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n}-\mathrm{E}\,\tilde{X}_{T_{2j-2}\wedge n})\geqslant 0,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\tilde{X}_n-X_0)&=\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n})\right]\\&\quad+\mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n}(\tilde{X}_{T_{2j-1}\wedge n}-\tilde{X}_{T_{2j-2}\wedge n})\right]\\&\geqslant(b-a)\,\mathrm{E}\,[U_0^{b-a}(\tilde{X},n),]\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\,U_a^b(X,n)&=\mathrm{E}\,U_0^{b-a}(\tilde{X},n)\leqslant\frac{1}{b-a}\mathrm{E}(\tilde{X}_n-\tilde{X}_0)\\&=\frac{1}{b-a}\mathrm{E}\,[(X_n-a)^+-(X_0-a)^+]\leqslant\frac{1}{b-a}(\mathrm{E}X_n^++|a|).\ \#\end{aligned}$$

3 定理（Doob 收敛定理） $X=\{X_n,n\in N\}$ 为下鞅，若 $\sup\limits_n\mathrm{E}\,X_n^+<\infty$ 或等价地，$\sup\limits_n\mathrm{E}\,|X_n|<\infty$，则当 $n\to\infty$ 时，$\{X_n\}$ a.s. 收敛于可积 r.v. X_∞.

证　首先说明条件的等价性.

$$\begin{aligned}\sup_n\mathrm{E}\,X_n^+&\leqslant\sup_n\mathrm{E}|X_n|=\sup_n(2\,\mathrm{E}X_n^+-\mathrm{E}\,X_n)\\&\leqslant-\mathrm{E}\,X_0+2\sup_n\mathrm{E}X_n^+.\end{aligned}$$

由 $U_a^b(X,n)$ 随 n 递增，记 $U_a^b(X)=\lim\limits_n U_a^b(X,n)$，它表示 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 上穿 $[a,b]$ 的次数，容易看出

$$\{\omega: \underline{\lim_n} X_n(\omega) < \overline{\lim_n} X_n(\omega)\} = \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b\in Q}} \{\omega: U_a^b(X) = +\infty\},$$

其中 Q 为有理数全体．利用上穿不等式，有

$$P(U_a^b(X,n)>k) \leqslant \frac{1}{k} \mathrm{E}\{U_a^b(X,n)\} \leqslant \frac{1}{k(b-a)}(\mathrm{E}X_n^+ + |a|)$$

$$\leqslant \frac{1}{k(b-a)}(\sup_n \mathrm{E}\, X_n^+ + |a|).$$

令 $n\to\infty$，得

$$P(U_a^b(X)=\infty) \leqslant P(U_a^b(X)>k) \leqslant \frac{1}{k(b-a)}(\sup_n \mathrm{E}\, X_n^+ + |a|).$$

再令 $k\to\infty$，得

$$P(U_a^b(X)=\infty)=0,$$

$$P(\underline{\lim_n} X_n < \overline{\lim_n} X_n) \leqslant \sum_{\substack{a<b \\ a,b\in Q}} P(U_a^b(X)=+\infty)=0,$$

因而存在 r.v.X_∞，使 $X_n\to X_\infty$ a.s.．由 Fatou 引理，

$$\mathrm{E}|X_\infty| \leqslant \sup_n \mathrm{E}\,|X_n| < \infty$$

所以 X_∞ 为 a.s. 有限且可积 r.v.＃

4 定义 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅（下鞅或上鞅）．若存在可积r.v.ξ使

$$\mathrm{E}(\xi|\mathscr{F}_n)=X_n(\geqslant X_n, \leqslant X_n)\ \text{a.s.}, n\in N,$$

则称 X 为右闭的，也称 ξ 右闭 X.

5 引理 设 $\xi\in L^1$，G 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域族，则$\{\mathrm{E}(\xi|\mathscr{B}), \mathscr{B}\in G\}$为一致可积 r.v. 族．

证 首先

$$P(|\mathrm{E}(\xi|\mathscr{B})|>N) \leqslant \frac{1}{N}\mathrm{E}|\mathrm{E}(\xi|\mathscr{B})| \leqslant \frac{1}{N}\mathrm{E}\,|\xi|,$$

所以

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{\mathscr{B}\in G} P(|\mathrm{E}(\xi|\mathscr{B})|>N)=0. \tag{5.1}$$

其次，由 $(|\mathrm{E}(\xi|\mathscr{B})>N)\in\mathscr{B}$，故

$$\int_{(|E(\xi|\mathscr{B})|>N)} |E(\xi|\mathscr{B})|dP \leqslant \int_{(|E(\xi|\mathscr{B})|>N)} E(|\xi||\mathscr{B})dP$$

$$= \int_{(|E(\xi|\mathscr{B})|>N)} |\xi| dp.$$

再由(5.1),即得

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\mathscr{B}\in\mathcal{G}} \int_{(|E(\xi|\mathscr{B})|>N)} |E(\xi|\mathscr{B})|dP = 0 \text{ .\#}$$

6 定理 设$X=\{X_n, n\in N\}$为下鞅,则下列各个条件等价

i) X为右闭的;

ii) $X^+=\{X_n^+, n\in N\}$为一致可积的;

iii) 当$n\to\infty$时,$X_n\to X_\infty$ a.s. 且X_∞右闭X

这时必有$X_n^+ \xrightarrow{L^1} X_\infty^+$

证 i)⇒ii) 若ξ右闭X,则$X_n \leqslant E(\xi|\mathscr{F}_n)$,

$$0 \leqslant X_n^+ \leqslant E(\xi^+|\mathscr{F}_n)$$

由引理5 $\{E(\xi^+|\mathscr{F}_n), n\in N\}$一致可积,$\{X_n^+, n\in N\}$亦一致可积.

ii)⇒iii) X^+一致可积,故$\sup_n E X_n^+ < \infty$,由Doob收敛定理$X_n \to X_\infty$ a.s.,同时由命题2.4.16,$X_n^+ \to X_\infty^+$ a.s. L^1,$X_n^- \to X_\infty^-$ a.s.,对任一$A\in\mathscr{F}_n$及$m>n$,有

$$\int_A X_n dP \leqslant \int_A X_m dP = \int_A X_m^+ dP - \int_A X_m^+ dP.$$

令$m\to\infty$,由$X_m^+ L^1$收敛于X_∞^+,而对X_m^-用Fatou引理,有

$$\int_A X_n dP \leqslant \lim_{m\to\infty} \int_A X_m^+ dP - \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_A X_m^- dP$$

$$\leqslant \int_A X_\infty^+ dP - \int_A X_\infty^- dP = \int_A X_\infty dP,$$

即$X_n \leqslant E(X_\infty|\mathscr{F}_n)$ a.s..

iii)⇒i) 是显然的.#

注 非正下鞅一定满足定理条件.

7 系 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为鞅，则下列各个条件等价：

i) X 为右闭的；

ii) X 为一致可积的；

iii) $X_n\to X_\infty$ a.s. 且 X_∞ 右闭 X，

这时必有 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$.

证 这时 X^+,X^- 都是下鞅.#

8 定理(Lévy) 设 ξ 为可积 r.v.，$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_n\mathscr{F}_n$，则

$$\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)\to\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)\ \text{a.s.}\ L^1.$$

证 记 $X_n=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$，$\{X_n\}$ 为右闭鞅，所以 $X_n\to X_\infty$ a.s.，L^1 且 $X_\infty\in\mathscr{F}_\infty$. 对 $A\in\mathscr{F}_n$，当 $m>n$，

$$\int_A X_m\mathrm{d}P=\int_A\xi\mathrm{d}P.$$

令 $m\to\infty$，利用 $X_m\xrightarrow{L^1}X_\infty$，可得

$$\int_A X_\infty\,\mathrm{d}P=\int_A\xi\,\mathrm{d}P.$$

记 $\mathscr{S}=\{A:\int_A X_\infty\,\mathrm{d}P=\int_A\xi\,\mathrm{d}P\}$，则 $\mathscr{S}$ 为 λ 类，$\mathscr{S}\supset\bigcup_n\mathscr{F}_n$，故

$$\mathscr{S}\supset\bigvee_n\mathscr{F}_n=\mathscr{F}_\infty,$$

即 $X_\infty=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_\infty)$.#

9 定理 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为鞅或非负下鞅，$p>1$，且 $\sup_n\|X_n\|_p<\infty$，则 $\{|X_n|^p,n\in N\}$ 一致可积，$X_n\to X_\infty$ a.s.，L^p，且

$$\|X_\infty\|_p=\sup_n\|X_n\|_p.$$

证 由命题 2.4 可知，若 $\sup_n\|X_n\|_p<\infty,p>1$，$X$ 必一致可积，$X_n\to X_\infty$ a.s. 且 X_∞ 右闭 X. 又由系 2.11 可知，

$$\|X_n\|_p\leqslant\|X_{n+1}\|_p\leqslant\|X_\infty\|_p. \tag{9.1}$$

利用 Doob 不等式 (3.17.1) 可知，$\|X_\infty^*\|_p\leqslant q\sup_n\|X_n\|_p<\infty$，$|X_n|\leqslant$

$|X_\infty^p|$，故$\{|X_n|^p, n\in N\}$一致可积，$X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$，且由(9.1)可得

$$\|X_\infty\|_p = \sup_n \|X_n\|_p. \#$$

二、负值参数鞅

在这一小节中我们考虑以$N_-=\{0,-1,-2,\cdots\}$为参数值的鞅，并假定也有固定的以N_-为参数的σ域流$\mathbf{F}=\{(\mathscr{F}_n, n\in N_-\}$，它满足$\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}$，每个$\mathscr{F}_n$都包含一切$\mathscr{F}$中$P$可略集.

10 命题 设$X=\{X_n, n\in N_-\}$为下鞅，则

i) 当$n\to-\infty$时，$X_n\to X_{-\infty}$ a.s. 成立，且$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_{-\infty})\geqslant X_{-\infty}$.

ii) X一致可积的充要条件是$\lim\limits_{n\to-\infty}\mathsf{E}\,X_n>-\infty$，且这时$X_n\to X_{-\infty}$ a.s. L^1.

证 i) 若以$V_a^b(X,n)$(表$X_n, X_{n+1}, \cdots, X_{-1}, X_0$)上穿$[a, b]$的次数，则由上穿不等式(2.1)，知

$$\mathsf{E}\,(V_a^b(X,n))\leqslant\frac{1}{b-a}\mathsf{E}(X_0-a)^+$$

$$\mathsf{E}\,(V_a^b(X,-\infty))\leqslant\frac{1}{b-a}\mathsf{E}\,(X_0-a)^+.$$

用定理3同样的方法可证$\lim\limits_{n\to-\infty}X_n=X_{-\infty}$ a.s. 存在.

ii) 必要性是显然的.

充分性. 由引理5 $\{\mathsf{E}(X_0|\mathscr{F}_n), n\in N_-\}$是一致可积的，所以只要证明$\{X_n-\mathsf{E}(X_0|\mathscr{F}_n), n\in N_-\}$的一致可积性即可，这样可以认为$\{X_n, n\in N_-\}$是非正下鞅. 若记

$$A=\lim_{n\to-\infty}\mathsf{E}\,X_n=\inf_n\mathsf{E}\,X_n,$$

则对每个固定的$\varepsilon>0$，必存在p_0，当$n\leqslant p_0$时

$$A\leqslant\mathsf{E}\,X_n\leqslant\mathsf{E}\,X_{p_0}<A+\frac{\varepsilon}{2},$$

且有$\displaystyle\int_{X_n\geqslant -N}X_n\,\mathrm{d}P\leqslant\int_{X_n\geqslant -N}X_{p_0}\,\mathrm{d}P$,

所以当 $n\leqslant p_0$时，有

$$\int_{X_n<-N} X_n \mathrm{d}P=\mathsf{E}\, X_n-\int_{X_n\geqslant -N} X_n \mathrm{d}P\geqslant \mathsf{E}\, X_{p_0}-\frac{\varepsilon}{2}-\int_{X_n\geqslant -N} X_{p_0} \mathrm{d}P$$

$$=-\frac{\varepsilon}{2}+\int_{X_n<-N} X_{p_0} \mathrm{d}P,$$

$$P(X_n<-N)\leqslant\frac{1}{N}\,\mathsf{E}\,(-X_n)\leqslant\frac{-A}{N}, \qquad (10.1)$$

所以存在与 n 无关的 N_1，使 $\int_{X_n<-N_1} |X_{p_0}|\,\mathrm{d}P<\frac{\varepsilon}{2}$. 将此式代入(10.1)，并注意到 $X_n\leqslant 0$，有

$$\int_{X_n<-N_1} |X_n|\,\mathrm{d}P<\varepsilon, \quad n\leqslant p_0 \qquad (10.2)$$

对有限个 r.v. $\{X_n,\ p_0\leqslant n\leqslant 0\}$，必有 N_2，使

$$\int_{X_n<-N_2} |X_n|\,\mathrm{d}P<\varepsilon, \quad p_0\leqslant n\leqslant 0. \qquad (10.3)$$

(10.2)(10.3) 表明 $\{X_n, n\in N_-\}$ 是一致可积的. 命题的其余结论是明显的. #

11 系 设 $X=\{X_n, n\in N_-\}$为鞅，则 X 必是一致可积的，且当$n\to-\infty$时，$X_n\to X_{-\infty}$ a.s. L^1.

12 定理 若 ξ 为可积 r.v.，$\mathscr{F}_{-\infty}=\bigcap_{n\in N_-}\mathscr{F}_n$，则

$$\lim_{n\to-\infty} \mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_{-\infty})\ \text{a.s.}\ L^1.$$

证 记 $X_n=\mathsf{E}(\xi|\mathscr{F}_n)$，则 $\{X_n, n\in N_-\}$为一致可积的. 当 $n\to-\infty$ 时 $X_n\to X_{-\infty}$ a.s.，L^1. 对任一 $A\in\mathscr{F}_{-\infty}\subset\mathscr{F}_n$，有

$$\int_A X_n \mathrm{d}P=\int_A \xi \mathrm{d}P,$$

令 $n\to-\infty$，可得

$$\int_A X_{-\infty} \mathrm{d}P=\int_A \xi \mathrm{d}P, \qquad A\in\mathscr{F}_{-\infty}$$

故 $X_{-\infty}=\mathsf{E}\,(\xi|\mathscr{F}_{-\infty})$ a.s. #

13　定义　若 $G=\{\mathscr{G}_n, n\in N\}$ 为递减 σ 域流，即 $\mathscr{G}_n\supset\mathscr{G}_{n+1}$，且每个 $\mathscr{G}_n$ 包含一切 $\mathscr{F}$ 可略集，又 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为 $\{\mathscr{G}_n\}$ 适应可积 r.v. 序列，且

$$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{G}_{n+1})=X_{n+1},$$

则称 X 为倒鞅.

对倒鞅 X，若令

$$\mathscr{F}_{-n}=\mathscr{G}_n,\qquad n\geqslant 0,$$

$$Y_{-n}=X_n,\qquad n\geqslant 0,$$

则 $\{Y_n, n\in N_-\}$ 便是 $\{\mathscr{F}_n, n\in N_-\}$ 适应负值参数鞅. 有关负值参数鞅的结果不难直接用于倒鞅.

三、一般停时定理

14　定理　设 $X=\{X_n, n\in \overline{N}\}$（$\overline{N}=N\cup\{+\infty\}$）为右闭鞅，$S\leqslant T$ 为两个停时，则 X_S, X_T 为可积的，且

$$\mathsf{E}(X_T|\mathscr{F}_S)=X_S\qquad \text{a.s.}. \tag{14.1}$$

证　先证明对任一停时 S，有

$$\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_S)=X_S\qquad \text{a.s.}. \tag{14.2}$$

对任一 $A\in\mathscr{F}_S$，有 $A(S=n)\in\mathscr{F}_n$，因而由 X 为右闭鞅，

$$\int_{A(S=n)} X_\infty \mathrm{d}P=\int_{A(S=n)} X_n \mathrm{d}P$$

$$\begin{aligned}\int_A X_\infty \mathrm{d}P&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(S=n)} X_\infty\mathrm{d}P+\int_{A(S=\infty)} X_\infty\mathrm{d}P\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(S=n)} X_n\mathrm{d}P+\int_{A(S=\infty)} X_\infty\mathrm{d}P\\&=\int_A\Big(\sum_{n=1}^{\infty}X_nI_{(S=n)}+X_\infty I_{(S=\infty)}\Big)\mathrm{d}P\\&=\int_A X_S\mathrm{d}P.\end{aligned}$$

因为 A 是 $\mathscr{F}_S$ 中任一集合，因而 (14.2) 成立.

对停时 S, T，若 $S\leqslant T$，则必有 $\mathscr{F}_S\subset\mathscr{F}_T$，因而由 (14.2) 及命

题2.9.

$$\mathsf{E}(X_T|\mathscr{F}_S)=\mathsf{E}(\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_T)|\mathscr{F}_S)=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_S)=X_S \quad \text{a.s.}. \#$$

15 定理 设 $X=\{X_n,n\in\overline{N}\}$ 为右闭下鞅，$S\leqslant T$ 为两个停时，则 X_S,X_T 可积，且

$$\mathsf{E}(X_T|\mathscr{F}_S)\geqslant X_S \quad \text{a.s.}. \tag{15.1}$$

证 $X_n=(X_n-\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n))+\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)=Z_n+Y_n$，

$\{Y_n=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)\}$为右闭鞅，因而按定理14 Y_T 可积且

$$\mathsf{E}(Y_T|\mathscr{F}_S)=Y_S. \tag{15.2}$$

$Z_n=X_n-\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_n)$ 为非正下鞅．由系3.13，对 $m\geqslant n$ 有

$$\mathsf{E}(Z_{T\wedge m}|\mathscr{F}_n)\geqslant Z_{T\wedge n}.$$

令 $m\to\infty$ 并由Fatou引理有

$$\mathsf{E}(Z_T|\mathscr{F}_n)\geqslant Z_{T\wedge n}$$

因而对任一 $A\in\mathscr{F}_S$，有

$$\begin{aligned}\int_A Z_T dP&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(S=n)} Z_T dP+\int_{A(S=\infty)} Z_T dP\\&\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{A(S=n)} Z_n dP+\int_{A(S=\infty)} Z_\infty dP\\&=\int_A\Big(\sum_{n=0}^{\infty}Z_nI_{(S=n)}+Z_\infty I_{(S=\infty)}\Big)dP=\int_A Z_S dP,\end{aligned}$$

即 $\mathsf{E}(Z_T|\mathscr{F}_S)\geqslant Z_S$，由此及(15.2)即可推出(15.1)．#

16 系 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为一致可积鞅，$\mathscr{T}$ 为停时全体，则 $\{X_T,T\in\mathscr{T}\}$ 是一致可积的．

证 由系7 X 为右闭的，故 $X_T=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_T)$．由引理5，$\{X_T,T\in\mathscr{T}\}$ 是一致可积的．#

四、应　用

17 命题(Колмогоров 零壹律) 设 $Y=\{Y_n,n\geqslant1\}$ 为独立r.v.序列，$\mathscr{B}^*$ 表其尾事件域，$A\in\mathscr{B}^*$，则 $P(A)=0$ 或1．

证 记 $\mathscr{F}_n=\sigma(Y_j,j\leqslant n)$，由 $\mathscr{F}_n$ 与 $\sigma(Y_j,j\geqslant n+1)\supset\mathscr{B}^*$ 独立，故对

$A\in\mathscr{B}^*$,

$$P(A|\mathscr{F}_n)=P(A) \quad ;$$

另一方面由 Lévy 定理(定理 8),

$$\lim_{n\to\infty}P(A|\mathscr{F}_n)=P(A|\mathscr{F}_\infty)=I_A,$$

故 $P(A)=I_A$ a.s., 即有 $P(A)=0$ 或 1. *

18 命题(Borel-Cantelli 引理的推广) 设 $\{A_n,\ n\geqslant1\}$ 为适应事件序列,则

$$P\{(A_n\text{ i.o.})\triangle(\sum_n P(A_n|\mathscr{F}_{n-1})=+\infty)\}=0. \qquad (18.1)$$

证 令 $X_n=\sum_{j=1}^{n}[I_{A_j}-P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})]$, 则 $\{X_n,\ n\geqslant1\}$ 为鞅. 对任一常数 $c>0$,令

$$T=\inf\{n:X_n\geqslant c\},$$

则 T 为停时. 记 $X^T=\{X_{T\wedge n},n\geqslant1\}$. 由系 3.11, X^T 仍为鞅,且因对每个 n,

$$X_{T\wedge n}\leqslant c+1,$$

故由定理 3, $\lim_{n\to\infty}X_{T\wedge n}$ a.s. 存在有限. 在 $\{\omega:\sup_n X_n(\omega)<c\}=\{\omega:T(\omega)=\infty\}$ 上, $X_n=X_{n\wedge T}$, 即

$$\{\sup_n X_n<c\}\subset\{\lim_{n\to\infty}X_n\text{ 存在有限}\}.$$

故在 $\{\sup_n X_n<\infty\}=\bigcup_{c=1}^{\infty}\{\sup_n X_n<c\}$ 上 $\lim_n X_n$ 存在有限,即

$$\{\omega:\sum_{j=1}^{\infty}I_{A_j}<\infty\}=\{\sup_n X_n<\infty\}\{\omega:\sum_j I_{A_j}<\infty\}$$

$$=\{\omega:\lim_n X_n\text{ 存在,有限}\}\{\omega:\sum_j I_{A_j}<\infty\}$$

$$\subset\{\omega:\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})<\infty\} \qquad \text{a.s.}.$$

对 $-X_n$ 进行同样的讨论,可得

$$\{\omega:\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})<\infty\}\subset\{\omega:\sum_{j=1}^{\infty}I_{A_j}<\infty\}\text{ a.s.}.$$

又因 $\{\omega:A_n\text{ i.o.}\}=\{\omega:\sum_{j=1}^{\infty}I_{A_j}=+\infty\}$, 由此即得 (18.1). *

注 若 $\sum_j P(A_j)<\infty$，则 $\mathrm{E}(\sum_j P(A_j|\mathscr{F}_{j-1}))=\sum_j P(A_j)<\infty$，故

$$\sum_j P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})<\infty \quad \text{a.s.}.$$

由 (18.1) 即得 $P(A_n \quad \text{i.o.})=0$. 若 $\{A_n, n\geqslant 1\}$ 为独立事件序列，取 $\mathscr{F}_n=\sigma(A_j, j\leqslant n)$，则 $P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})=P(A_j)$. 当 $\sum_j P(A_j)=+\infty$ 时，$\sum_j P(A_j|\mathscr{F}_{j-1})=+\infty$ a.s.，故由(18.1)可得 $P(A_n \quad \text{i.o.})=1$. 所以由 (18.1) 可推出 Borel-Cantelli 引理.

10 命题（Колмогоров 强大数法则） 设$\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 为i.i.d .r.v. 序列，$\mathrm{E}Y_1$ 存在，则

$$P(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j=\mathrm{E}Y_1)=1 \qquad (19.1)$$

证 不妨记$\mathscr{B}_{-n}=\sigma(\sum_{i=1}^{j}Y_i, j\geqslant n)$，则$\mathscr{B}_{-n-1}\subset\mathscr{B}_{-n}$. 由定理 12，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(Y_1|\mathscr{B}_{-n})=\mathrm{E}(Y_1|\mathscr{B}_{-\infty})\triangleq X_\infty \quad \text{a.s.}\ L^1.$$

另一方面，利用$\mathscr{B}_{-n}=\sigma(\sum_{i=1}^{n}Y_i, Y_{n+1}, \cdots)$，又因 $(Y_k, k\geqslant n+1)$ 与 Y_1，$\sum_{j=1}^{n}Y_j$ 独立，按系 2.27，有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y_1|\mathscr{B}_{-n})&=\mathrm{E}(Y_1|\sum_{j=1}^{n}Y_j)=\mathrm{E}(Y_k|\sum_{j=1}^{n}Y_j) \qquad (1\leqslant k\leqslant n)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(Y_k|\sum_{j=1}^{n}Y_j)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j.\end{aligned}$$

在上式中第二个等号利用了 $Y_1,\cdots,Y_n$ 独立同分布的性质，因而其分布关于足标的任意置换是不变的. 由此即可得 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j\to X_\infty$ a.s.，L^1. 又 X_∞ 并不依赖于 Y 中前面任意有限项，因而 X_∞ 是关于 Y 的尾事件域可测的，由命题 17，X_∞ a.s. 为常数，必为 $\mathrm{E}Y_1$，故 (19.1) 成立. #

20 命题 设 $Y=\{Y_n, n\geqslant 1\}$ 为独立 r.v. 序列，$\varphi_n(t)=\mathrm{E}(e^{itY_n})$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}Y_n$ a.s.收敛于有限 r.v. 的充要条件是存在 Lebesgue 正测度集 U，当$t\in U$ 时，$\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)$ 收敛且极限不为零.

证 $\Rightarrow$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ a.s. 收敛，由 Y 的独立性，

$$\mathbf{E}(e^{it\sum_{j=1}^{n} Y_j})=\prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}(e^{itY_j})=\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t).$$

令 $n\to\infty$，可得 $\varphi(t)\triangleq\mathbf{E}(e^{it\sum_{j=1}^{\infty} Y_j})=\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)$。由控制收敛定理，$\varphi(t)$ 对 t 连续，$\varphi(0)=1$，所以 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 的某个邻域内不为零.

$\Leftarrow$ 记 $X_n=\sum_{j=1}^{n} Y_j$，由 $\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)$ 在$t\in U$收敛且不为零，则当$t\in U$时，必有 $\varphi_n(t)\neq 0$。令

$$Z_n=\exp(itX_n)/\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t).$$

若 $\mathbf{F}=\{\mathscr{F}_n,\ n\in N\}$ 为 Y 的自然 σ 域流，则利用 Y_{n+1} 与 $\mathscr{F}_n$ 的独立性，有

$$\begin{aligned}E(Z_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=\exp(itX_n)\mathbf{E}(e^{itY_{n+1}}|\mathscr{F}_n)/\prod_{j=1}^{n+1}\varphi_j(t)\\&=\exp(itX_n)\mathbf{E}(e^{itY_{n+1}})/\prod_{j=1}^{n+1}\varphi_j(t)\\&=\exp(itX_n)/\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)=Z_n\quad \text{a.s.},\end{aligned}$$

所以 $Z=\{Z_n\ n\geq 1\}$ 是复值鞅，且

$$|Z_n|=|\exp(itX_n)/\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)|\leqslant|\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)|^{-1}<\infty,\quad t\in U,$$

即 $t\in U$时，Z 为有界鞅，由定理 3，$Z_n\to Z_\infty$ a.s. 存在，故对 $t\in U$，还有

$$\exp(itX_n)=Z_n\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(t)\to Z_\infty\prod_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t)\ \text{a.s.}.\qquad(20.1)$$

下面由此式来证明 $X_n\to X_\infty$ a.s. 存在且有限. 若以 λ 表示直线上的 Lebesgue测度，记

$$D=\{(t,\omega):\lim_{n\to\infty}\exp(itX_n(\omega))\ \text{不存在},\ t\in U\},$$

则 D 是 $(\mathbf{R}^1\times\Omega,\mathscr{B}\times\mathscr{F})$上可测集，当 $t\in U$ 时，由 (20.1) $P(D_t)=0$ (D_t 表 D 的 t 截口集)，因而由 Fubini 定理，$(\lambda\times P)(D)=0$，并有可

略集 N，当 $\omega\in N^c$ 时，$\lambda(D_\omega)=0$. 对任一有界 Borel 集 $S\subset U$，令

$$f_S(X_n)=\int_S \exp(itX_n)\lambda(\mathrm{d}t),$$

则由控制收敛定理，当 $\omega\in N^c$时，$\lim\limits_{n\to\infty} f_S(X_n)$ 存在且有限.

其次，我们来证明 $P(\underline{\lim}|X_n|<\infty)=1$. 若$\mathscr{B}^*$ 表示 Y 的尾事件域，则 $\{\overline{\lim\limits_n}|X_n|=+\infty\}\in\mathscr{B}^*$. 若 $P(\overline{\lim}\ X_n=+\infty)=1$，又因 $\lim\limits_{n\to\infty} f_S(X_n)$ a.s. 存在，故由分析中的 Riemann-Lebesgue 引理，对任一有界 Borel 集 $S\subset U$，必有

$$\lim_{n\to\infty} f_S(X_n)=0 \qquad \omega\in N^c\{\overline{\lim_n} X_n=+\infty\}.$$

因为 $|f_S(X_n)|\leqslant\lambda(S)$，故由控制收敛定理，对每个有界 Borel 集 S 有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_S(X_n)=0.$$

但由 Fubini 定理

$$\mathbf{E}\,f_S(X_n)=\int_S \mathbf{E}\,(\exp(itX_n))\lambda(\mathrm{d}t)=\int_S\prod_{j=1}^n \varphi_j(t)\,\lambda(\mathrm{d}t),$$

$|\prod\limits_{j=1}^n \varphi_j(t)|\leqslant 1$，也由控制收敛定理，

$$\int_S\prod_{j=1}^\infty \varphi_j(t)\lambda(\mathrm{d}t)=\lim_{n\to\infty}\int_S\prod_{j=1}^n\varphi_j(t)\lambda(\mathrm{d}t)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}f_S(X_n)=0.$$

由 S 的任意性，故

$$\prod_{j=1}^\infty\varphi_j(t)=0 \quad t\in U \quad \text{a.e.}\,\mathrm{d}\lambda,$$

与命题假设矛盾. 因而 $P(\underline{\lim\limits_n}|X_n|<\infty)=1$.

最后，我们证明，若 $\omega_0\in N^c$，则

$$\lim_{n\to\infty}X_n(\omega_0) \quad \text{存在，有限.}$$

若不然，有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_n(\omega_0)=\beta>\alpha=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}X_n(\omega_0)$，则由于

$$\lim_{n\to\infty}\exp(itX_n(\omega_0))\ \text{存在有限 a.e.,}\ t\in U, \qquad (20.2)$$

必有

$$\exp(it\alpha)=\exp(it\beta).$$

此式只能对 $t=\frac{2k\pi}{\beta-\alpha}(k=0,\pm1,\cdots)$ 成立，与(20.2)矛盾．因而当

$$\omega\in\{\omega:\overline{\lim}|X_n(\omega)|<\infty\}\cap\{\omega:\lambda(D_\omega)=0\}$$

必有 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n(\omega)$ 存在且有限，即 $\sum\limits_n Y_n$ a.s. 收敛．#

21 命题 设 $Y=\{Y_n,n\in N\}$ 为鞅差序列．

i) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{E}\,Y_n^2<\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Y_n$ 在 a.s. 及 L^2 意义下收敛；

ii) 若 $\{u_n,n\in N\}$ 为递增趋于无穷的数列，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{-2}\,\mathsf{E}\,Y_n^2<\infty$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j=0$ a.s..

iii) 若 $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mathsf{E}Y_j^2=+\infty$，$s_n^2=\sum\limits_{j=1}^{n}\mathsf{E}\,Y_j^2$，则对每个 $\varepsilon>0$，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=n}^{n}Y_j/s_n\,(\log s_n^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)=0\qquad\text{a.s.}\quad.\tag{21.1}$$

证 i) 记 $X_n=\sum\limits_{j=0}^{n}Y_j$，则 $\{X_n,n\in N\}$ 为鞅，$\mathsf{E}\,X_n^2=\sum\limits_{j=0}^{n}\mathsf{E}Y_j^2\leqslant\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mathsf{E}Y_j^2<\infty$．由定理 9．$X_n\to X_\infty$ a.s. L^2．

ii) 由 i) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}u_j^{-1}Y_j$ a.s. 收敛，又由 Kronecker 引理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}\sum_{j=0}^{n}Y_j=0\ \text{a.s.}\ .$$

iii) 取 $u_n=s_n\,(\log s_n^2)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$，则 $u_n\uparrow\infty$，且．

$$u_n^{-2}\ \mathsf{E}Y_n^2=s\frac{s_n^2-s_{n-1}^2}{s_n^2(\log s_n^2)^{1+2\varepsilon}}\leqslant\int_{s_{n-1}^2}^{s_n^2}\frac{dx}{x(\log x)^{1+2\varepsilon}}.$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{-2}\mathsf{E}Y_n^2<\infty$，由 ii) (21.1) 成立．#

注 作为本命题的特例，取 $\{Y_n,n\geqslant1\}$ 为零均值相互独立 r.v. 序列，

则由此命题可推出定理3.2.3和命题3.3.6.#

22 命题 设P_1,P_2同为$(\Omega,\mathscr{F})$上概率测度，且

$$P_2\ll P_1,\ f(\omega)=\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}.$$

i）若将P_1,P_2看作为$\mathscr{F}_n$上概率测度，分别表以$P_2^{(n)}$，$P_1^{(n)}$，则$P_2^{(n)}\ll P_1^{(n)}$．设$f_n(\omega)=\frac{\mathrm{d}P_2^{(n)}}{\mathrm{d}P_1^{(n)}}$，则$f_n(\omega)=\mathbf{E}_1\left(\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}|\mathscr{F}_n\right)$ a.s. P_1，

$\mathbf{E}_1(\cdot)$表示关于P_1的期望．

ii）$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(\omega)=f_\infty(\omega)=\mathbf{E}_1\left(\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}|\mathscr{F}_\infty\right)$ a.s. P_1.

证　i）$P_2^{(n)}\ll P_1^{(n)}$是显然的，对$A\in\mathscr{F}_n$

$$\int_A f_n\mathrm{d}P_1=\int_A f_n\mathrm{d}P_1^{(n)}=P_2^{(n)}(A)=P_2(A)=\int_A f\mathrm{d}P_1,$$

所以$f_n=\mathbf{E}_1(f|\mathscr{F}_n)$ a.s. P_1.

ii）是Lévy定理的直接推论．#

23 设$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$，$P_1,P_2$是$(\Omega,\mathscr{G})$上的概率测度，由Lebesgue分解定理，存在$M\in\mathscr{G}$，使

$$P_2(A)=P_2(AM)+\int_A f(\omega)P_1(\mathrm{d}\omega),\ P_1(M)=0$$

下面，我们约定取

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}\right|_{\mathscr{G}}=\begin{cases}f(\omega) & \omega\in M^c;\\ +\infty & \omega\in M.\end{cases}$$

命题 设P_1,P_2为$(\Omega,\mathscr{F})$上概率测度，$f_n=\left.\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}\right|_{\mathscr{F}_n}$，$f=\left.\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P_1}\right|_{\mathscr{F}_\infty}$，则

i）$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f_\infty$　a.s. P_1,P_2;

ii）在$\mathscr{F}_\infty$上$P_2\ll P_1$的充要条件是对每个n，在$\mathscr{F}_n$上$P_2\ll P_1$，且$P_2(\lim\limits_n f_n<\infty)=1$;

iii) 在$\mathscr{F}_\infty$上$P_2\perp P_1$的充要条件是$P_2(\lim\limits_{n\to\infty} f_n=+\infty)=1$，或等价地，$P_1(\lim\limits_{n\to\infty} f_n=0)=1$.

证　取$P=\frac{1}{2}(P_1+P_2)$，则$P_2\ll P,P_1\ll P$

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_n}\triangleq P_{1n}\to P_{1\infty}\triangleq\left.\frac{\mathrm{d}P_1}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_\infty}\qquad \text{a.s.}\quad P,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_n}\triangleq P_{2n}\to P_{2\infty}\triangleq\left.\frac{\mathrm{d}P_2}{\mathrm{d}P}\right|_{\mathscr{F}_\infty}\qquad \text{a.s.}\quad P.$$

所以$f_n=\frac{P_{2n}}{P_{1n}}\to\frac{P_{2\infty}}{P_{1\infty}}=f_\infty$, a.s. P. 而在$\mathscr{F}_\infty$上，

$$P_2\ll P_1\iff P_2(f_\infty<\infty)=1\ (\text{即}\ P_2(M)=0),$$
$$P_2\perp P_1\iff P_2(M)=1\iff P_2(f_\infty=+\infty)=1.$$

对换P_1,P_2的位置，即得

$$P_2\perp P_1\iff P_1\left(\frac{1}{f_\infty}=+\infty\right)=1\iff P_1(f_\infty=0)=1.\ \blacksquare$$

五、上鞅的分解定理

24　定理(Doob 分解)　若$X=\{X_n,n\in N\}$为上鞅，则必可表为

$$X_n=M_n-A_n,$$

其中$M=\{M_n,n\in N\}$为鞅，$A=\{A_n,n\in N\}$为可料递增序列，$A_0=0$，且具有这种性质的分解是唯一的.

证　令$Y_n=X_n-X_{n-1}$，$\{Y_n\}$为上鞅差，记

$$Y_n=(Y_n-\mathrm{E}(Y_n|\mathscr{F}_{n-1}))+\mathrm{E}(Y_n|\mathscr{F}_{n-1})\quad(n\geqslant1),$$

则$\{Y_n-\mathrm{E}(Y_n|\mathscr{F}_{n-1}),n\geqslant1\}$为鞅差，$\mathrm{E}(Y_n|\mathscr{F}_{n-1})\leqslant0$，令

$$M_n=X_0+\sum_{j=1}^n[Y_j-\mathrm{E}(Y_j|\mathscr{F}_{j-1})],$$

$$A_n=-\sum_{j=1}^n\mathrm{E}(Y_j|\mathscr{F}_{j-1})(n\geqslant1),A_0=0,$$

则容易验证M,A满足命题要求. 若X还可表为

$$M_n - A_n = X_n = M'_n - A'_n,$$

则

$$M_n - M'_n = A_n - A'_n.$$

由 A, A' 的可料性及 M, M' 为鞅，可得

$$A_n - A'_n = \mathsf{E}(M_n - M'_n | \mathscr{F}_{n-1}) = M_{n-1} - M'_{n-1} = A_{n-1} - A'_{n-1} = \cdots =$$
$$= A_0 - A'_0 = 0.$$

故分解是唯一的. #

25　命题 (Riesz分解)　设 $X = \{X_n, n \in N\}$ 为上鞅，则下列条件等价：

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E} X_n > -\infty$;

ii) X 有如下分解

$$X_n = Y_n + Z_n, \qquad (25.1)$$

其中 $Y = \{Y_n, n \in N\}$ 为鞅，$Z = \{Z_n, n \in N\}$ 为非负上鞅，$\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E} Z_n = 0$. 且具有这种性质的分解为唯一的. 特别当 X 为非负上鞅时，(25.1) 中的 Y 也是非负的.

证　ii)⇒ i) $\mathsf{E} X_n = \mathsf{E} Y_n + \mathsf{E} Z_n = \mathsf{E} Y_0 + \mathsf{E} Z_n \geqslant \mathsf{E} Y_0 > -\infty$.

i)⇒ ii)　由 Doob 分解 $X_n = M_n - A_n$,

$$\mathsf{E} X_n = \mathsf{E} M_n - \mathsf{E} A_n = \mathsf{E} M_1 - \mathsf{E} A_n.$$

由 i) 可推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E} A_n < \infty$. 即 $A_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 是可积的. 取

$$Y_n = M_n - \mathsf{E}(A_\infty | \mathscr{F}_n),$$
$$Z_n = \mathsf{E}(A_\infty | \mathscr{F}_n) - A_n,$$

则容易验证 Y, Z 满足 ii) 的要求.

唯一性：若 X 有另一具有同样性质的分解：

$$Y_n + Z_n = X_n = Y'_n + Z'_n,$$

则 $W_n = Y_n - Y'_n = Z'_n - Z_n$ 为鞅，且 L^1 收敛于零，即 W 一致可积且 $W_\infty = 0$,

$$Y_n - Y'_n = W_n = \mathsf{E}(W_\infty | \mathscr{F}_n) = 0.$$

所以具有上述性质的分解是唯一的.

特别当 X 为非负上鞅时，有

$$Y_n = M_n - \mathsf{E}(A_\infty|\mathscr{F}_n) = \lim_{p\to\infty}\mathsf{E}(M_p|\mathscr{F}_n) - \lim_{p\to\infty}\mathsf{E}(A_p|\mathscr{F}_n)$$
$$= \lim_{p\to\infty}\mathsf{E}(M_p - A_p|\mathscr{F}_n) = \lim_{p\to\infty}\mathsf{E}(X_p|\mathscr{F}_n) \geqslant 0. \#$$

26 命题 (Krickberg 分解) 设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为上鞅，则下列条件等价：

i) $\sup_n \mathsf{E} X_n^- < \infty$;

ii) X 可表为

$$X_n = L_n - M_n, \tag{26.1}$$

其中 L_n 为非负上鞅，M_n 为非负鞅，且这时可使 X 的上述分解具有最小性，即若 $X_n = L_n' - M_n'$ 是 X 的另一分解，L_n', M_n' 分别为非负上鞅和非负鞅，则必有

$$L_n \leqslant L_n', \quad M_n \leqslant M_n'.$$

证 ii)⇒ i) $X_n^- \leqslant M_n$，故 $\mathsf{E}X_n^- \leqslant \mathsf{E}M_n = \mathsf{E}M_0 < \infty$

i)⇒ ii) $X^- = \{X_n^-, n\in N\}$ 为非负下鞅，且 $\lim_n \mathsf{E}(-X_n) \leqslant \lim_n \mathsf{E}X_n^- = \sup_n \mathsf{E}X_n^- < \infty$，故有 Riesz 分解：

$$X_n^- = M_n - Z_n,$$

其中 $\{M_n, n\in N\}$ 为非负鞅，$\{Z_n\}$ 为非负上鞅。令

$$L_n = X_n + M_n \geqslant -X_n^- + M_n = Z_n \geqslant 0,$$

故 $\{L_n\}$ 为非负上鞅，(26.1) 成立.

最小性：若 X 有另一同样性质的分解：

$$L_n - M_n = X_n = L_n' - M_n',$$

则 $M_n' \geqslant X_n^- = M_n - Z_n$. 故对 $p>0$，有

$$M_n' = \mathsf{E}(M_{n+p}'|\mathscr{F}_n) \geqslant \mathsf{E}(X_{n+p}^-|\mathscr{F}_n) = M_n - \mathsf{E}(Z_{n+p}|\mathscr{F}_n)$$

在上式右端令 $p\to\infty$，并由 $Z_{n+p}\xrightarrow{L^1}0$，可得 $\mathsf{E}(Z_{n+p}|\mathscr{F}_n)\xrightarrow{L^1}0$，即

$$M_n' \geqslant M_n, \quad L_n' \geqslant L_n. \#$$

注 从上述证明可见

$$M_\infty = X_\infty^-, \quad L_\infty = X_\infty^+.$$

27 系 设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅，且 $\sup_n \mathsf{E}X_n^+ < \infty$，则 X 可表示为

$$X_n = L_n - M_n,$$

其中L_n,M_n都是非负鞅且使上述分解有最小性。

小　结

本章§1内容是第一、二章测度论内容的继续，主要介绍广义测度的三个基本定理：Hahn-Jordan分解、Lebesgue分解与Radon-Nikodym定理。由于Hahn-Jordan分解，对广义测度的研究可归为正测度的情形来考虑。测度绝对连续与R—N导数也是概率论中常用的概念。§2介绍条件期望的概念。用测度论方法规定的一般条件期望概念来自古典的条件概率，但与古典的条件概率已有很大的不同。一般条件期望已成为随机过程与数理统计中不可缺少的概念与工具。§2第二段中提到了最常用的条件期望的性质，因而首先要熟练掌握这部分内容。§3，§4介绍离散参数鞅经典理论的内容。在本书中选择这部分内容，一是因为现今鞅论已成为随机过程与数理统计理论研究中的一种重要工具，同时学习鞅理论本身有助于熟练掌握条件期望的概念与性质。在这两节中重要的是停时定理与各种鞅收敛定理。这两节不少内容是围绕这两个定理展开的，有些结论也可看作为这两个定理的应用。在§3，§4中介绍的一些应用已将第三章独立r.v.序列中一些重要结果都用鞅的工具给出了新的证明和推广，由此足见鞅这一工具的威力。

习　题

1．证明对任一广义测度μ，$\mu^+\perp\mu^-$，$\mu^+\ll\mu$，$\mu\sim|\mu|$。对后面情况写出R—N导数。

2．设$f_1,f_2\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P)$，$\mu_i(A)=\int_A f_i dP\ (i=1,2)$，试用$f_i(i=1,2)$表示$\mu_1$和$\mu_2$绝对连续或奇异的条件、$\mu_1$和$\mu_2$间R—N导数及Lebesgue分解。

3、若 Ω 为某个不可列集，$\mathscr{F}=\{E:E\subset\Omega, E$ 或 E^c 可列$\}$。$\mu(E)=E$ 的点数。$\nu(E)=0$ 或 1，视 E可列或不可列而定，则 $\nu\ll\mu$，但 ν 不能表示为关于 μ 的不定积分。

4、试证 $|\mu|(A)=\sup\{\int_A X d\mu: X\in\mathscr{F}, |X|\leqslant 1,\} A\in\mathscr{F}$。

5、设 $\{P_\alpha, \alpha\in I\}$ 为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上概率测度族，则存在概率测度 P，使对每个 $\alpha\in I$，$P_\alpha\ll P$ 的充要条件是存在 $\{\alpha_n, n\geqslant 1\}\subset I$ 及 $c_n\geqslant 0$，$\sum_n c_n=1$，使 $Q=\sum_n c_n P_{\alpha_n}$ 与 $\{P_\alpha, \alpha\in I\}$ 等价，即对任一 $A\in\mathscr{F}$，$Q(A)=0\Leftrightarrow P_\alpha(A)=0 \forall\alpha\in I$。

6、对 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上概率测度 P,Q。试证：

i) 必有概率测度 μ，使 $P\ll\mu, Q\ll\mu$；

ii) 若 μ 满足 i)，取 $\rho(P,Q)=\int_\Omega\sqrt{\frac{dP}{d\mu}\frac{dQ}{d\mu}}\,d\mu$，则 $\rho(P,Q)$ 与 μ 的取法无关且 $\rho\leqslant 1$。

iii) 对按 ii) 规定的 ρ，则 $\rho(P,Q)=0$ 的充要条件是 $P\perp Q$。

iv) 对按 ii) 规定的 ρ，

$\rho(P,Q)=\inf\{\sum_k\sqrt{P(E_k)Q(E_k)}; E_k\in\mathscr{F}, (E_k\ k\geqslant 1)$ 为 Ω 的分割$\}$。

7、设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域。若 $A\in\mathscr{F}$，$B=\{\omega: P(A|\mathscr{B})>0\}$。验证 i) $B\in\mathscr{B}$，ii) $P(A/B)=0$，iii) 若有 B' 满足上述 i)，ii)，则 $P(B/B')=0$。

8、证明：i) 若 $X\in L^2$，Y 为 r.v.，且 $E[X|Y]=Y$，$E[Y|X]=X$，则 $X=Y$；

ii) 设 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，$X\in L^1$，若 $X_1=E[X|\mathscr{B}_1]$，$X_2=E[X_1|\mathscr{B}_2]$，$X=X_2$ 则 $X_1=X_2$；

iii) 若 $X_1, X_2\in L^1$，$E[X|Y]=Y$，$E[Y|X]=X$，则 $X=Y$。

9、设 $X\in L^2$，$\mathscr{B}$ 为子 σ 域，试证 i) $\mathrm{var}(E(X|\mathscr{B}))\leqslant\mathrm{var}(X)$。

ii) 若 $a\in[-\infty,+\infty]$，$Y=X\wedge a$，则 $E\{[Y-E(Y|\mathscr{B})]^2|\mathscr{B}\}\leqslant E\{[X-E(X|\mathscr{B})]^2|\mathscr{B}\}$。

10、对 $p\geqslant 1$，若 $X_n\xrightarrow{L^p}X$，则 $E(X_n|\mathscr{B})\xrightarrow{L^p}E(X|\mathscr{B})$。

11、若 X 为非负 r.v.，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，证明：

$E[X|\mathscr{B}]=\mathrm{ess\,sup}\{h: h\in\mathscr{B}, h\geqslant 0$ 且 $\int_A h\,dP\leqslant\int_A X dP, \forall A\in\mathscr{B}\}$。

12、若 $\Omega=\{(x,y): 0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，$\mathscr{F}$ 为 Ω 上 Borel 集全体，P 为二维 Lebesgue 测度，令

$$X_n(x)=nI_{[0,\frac{1}{n}[}(x),\ Y_n(y)=I_{]\frac{k}{2^m},\frac{k+1}{2^m}]}(y),n=2^m+k,0\leqslant k\leqslant 2^{m-1},$$

$Z_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y)$, $\mathscr{B}=\sigma(Y_n,n\geqslant 1)$.

验证 $\{Z_n,n\geqslant 1\}$ 一致可积，但对条件期望形式的 Fatou 引理并不成立，即有

$$\mathsf{E}(\varliminf_n Z_n|\mathscr{B})=0<1=\varliminf_n \mathsf{E}(Z_n|\mathscr{B}).$$

13．若 $X_n\uparrow X$，且 $\mathsf{E}X$ 存在，试证在 $\{\mathsf{E}(X_1|\mathscr{B})>-\infty\}$ 上成立

$$\mathsf{E}(X|\mathscr{B})=\lim \mathsf{E}(X_n|\mathscr{B}).$$

14．若 $X_n\geqslant X_1$，$\mathsf{E}(\varlimsup X_n)$ 存在，则在 $\{\mathsf{E}(X_1|\mathscr{B})<\infty\}$ 上成立

$$\mathsf{E}(\varlimsup_n X_n|\mathscr{B})\leqslant\varlimsup_n \mathsf{E}(X_n|\mathscr{B}).$$

15．若 $|X_n|\leqslant X_1$，$X_n\to X$ a.s.，$\mathsf{E}X$ 存在，则在 $\{\mathsf{E}(X_1|\mathscr{B})<\infty\}$ 上，

$$\mathsf{E}(X_n|\mathscr{B})\to\mathsf{E}(X|\mathscr{B})\quad \text{a.s.}.$$

16．设 $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ 为准可积 r. v，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，又 $\varliminf X_n$ 准可积，若

$\lim\limits_{k\to+\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1}\mathsf{E}\{X_n^-I_{(X_n^->k)}|\mathscr{B}\}=0$ a.s. 则

$$\mathsf{E}(\varliminf_n X_n|\mathscr{B})\leqslant\varliminf_n \mathsf{E}(X_n|\mathscr{B}).$$

17．设 $X=\{X_n,\ n\in N\}$，$Y=\{Y_n,n\in N\}$ 为两个下鞅，T 为停时，且在 $(T<\infty)$ 上，$X_T\leqslant Y_T$．又

$$Z_n(w)=\begin{cases}X_n(w), & n<T(w);\\ Y_n(w), & n\geqslant T(w),\end{cases}$$

证明 $Z=\{Z_n,n\in N\}$ 为下鞅。

18．设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为鞅，且满足

$$\mathsf{E}(X_n|X_j,j\geqslant n+1)=X_{n+1},$$

则 $X_n=X_1$ a.s..

19．设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 为下鞅，$D_a^b(X,n)$ 表示 $(X_0,X_1\cdots,X_n)$ 完成下穿 $[a,b]$ 的次数．证明：

$(b-a)P(D_a^b(X,n)\geqslant k+1|\mathscr{F}_0)\leqslant\mathsf{E}[(X_n-b)^+I_{(D_a^b(X,n)=k)}|\mathscr{F}_0)$，$k\geqslant 1$

$(b-a)P(D_a^b(X,n)\geqslant 1|\mathscr{F}_0)\leqslant\mathsf{E}[X_n-b)^+I_{(D_a^b(X,n)=0)}|\mathscr{F}_0)-(X_0-b)^+$，

$$\mathsf{E}(D_a^b(X,n)|\mathscr{F}_0)\leqslant\frac{1}{b-a}\{\mathsf{E}[(X_n-b)^+|\mathscr{F}_0]-(X_0-b)^+\}.$$

20．设 $X=\{X_n,n\in\overline{N}\}$ 为下鞅（鞅），S,T 为两个停时，则

$$\mathsf{E}(X_T|\mathscr{F}_S)\geqslant X_{T\wedge S}\ (=X_{T\wedge S}).$$

21．设 $Y=\{Y_n,n\in N\}$ 为 i.i.d. 非负 r.v. 序列，$\mathsf{E}Y_1=1$．证明：

若 $P(Y_1=1)<1$，则 $\{X_n=\prod_{j=0}^{n} Y_j, n\in N\}$ 为非负鞅，且 $Y_n\to 0$ a.s..

22．设 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为 i.i.d.r.v. 序列，$P(Y_1=1)=P(Y_1=-1)=\frac{1}{2}$

$\mathscr{F}_n=\sigma(Y_j, j\leqslant n)$，又事件列 $\{B_n, n\in N\}$ 满足 $B_n\in\mathscr{F}_n$ 且

$$\lim_n P(B_n)=0,\quad P(\overline{\lim_n} B_n)=1。$$

令 $X_0=0$，$X_{n+1}=X_n(1+Y_{n+1})+I_{B_n}Y_{n+1}$。证明 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅，且

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=0)=1,\quad P(\lim_n X_n \text{存在})=0.$$

这个例子说明对于鞅依概率收敛不能推出 a.s. 收敛.

23．若 Ω 表自然数全体，

$$\mathscr{F}_n=\sigma(\{1\},\{2\},\cdots,\{n\},[n+1,\infty[).$$

$$P(\{n\})=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad X_{n+1}=(n+1)I_{[n+1,\infty[}\quad(n=1,2,\cdots),$$

验证 $\{X_n\}$ 是一个鞅，$\mathsf{E}X_n=1$，但 $\sup_n X_n(\omega)=\omega$ 不是可积的。此例表明对鞅 X，X^* 不一定是可积的。

24．设 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为 i.i.d.r.v. 序列，$P(Y_1=1)=P(Y_1=-1)=\frac{1}{2}$，

$X_n=\sum_{j=1}^{n} Y_j$，$T=\inf\{n: X_n=1\}$)，证明：i) $\{X_n\}$ 为鞅；ii) $P(T<\infty)=1$，

iii) $\mathsf{E}X_T=1\neq 0=\mathsf{E}X_n$.

25．设 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为独立零均值 r.v. 序列，$X_n=\sum_{j=1}^{n} Y_j$. 若 $X_n\to X_\infty$. a.s. 且 X_∞ 可积，证明 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为一致可积的.

26．设 $\{\mathscr{F}_n, n\in\overline{N}\}$ 为递增 σ 域族，$X=\{X_n, n\in N\}$ 为可积 r.v. 序列，$X_n\to X_\infty$ a.s.，又 $|X_n|\leqslant X\in L^1$，则 $\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}(X_n|\mathscr{F}_n)=\mathsf{E}(X_\infty|\mathscr{F}_\infty)$ a.s..

27．设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为下鞅，则 X 一致可积的充要条件是存在可积 r.v. Y 右闭 X，且 $\lim_{n\to\infty} X_n=X_\infty$ a.s. $\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}X_n=\mathsf{E}X_\infty$.

28．设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为一致可积下鞅，则 $\{X_T, T\in\mathscr{T}\}$ 为一致可积的.

29．设 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为上鞅(鞅)，停时 T 称为 X 的正则停时，若 $X^T=\{X_{T\wedge n}, n\in N\}$ 为右闭上鞅(鞅)。证明若 T 为正则停时，又停时 $T_1\leqslant T_2\leqslant T$，则

$$\mathsf{E}(X_{T_2}|\mathscr{F}_{T_1})\leqslant X_{T_1}\ (=X_{T_1})\ \text{a.s.}.$$

30．设 T 为上鞅(鞅) X 的正则停时，停时 $S\leqslant T$，则 S 亦为 X 的正则停时.

31. 证明 T 为鞅 X 的正则停时的充要条件是：i) $\mathsf{E}[|X_T|I_{(T<\infty)}]<\infty$；

ii) $\{X_n I_{(T>n)}, n\in N\}$ 一致可积，或等价地，$X^T=\{X_{T\wedge n}, n\in N\}$ 为一致可积的.

32. 证明 T 为上鞅 X 的正则停时的充要条件是：

i) $\mathsf{E}[X_T^- I_{(T<\infty)}]<\infty$；

ii) $\{X_n^- I_{(T>n)}, n\in N\}$ 一致可积，或等价地 $(X^-)^T=\{X_{T\wedge n}^-, n\in N\}$ 为一致可积的.

33. 证明上鞅 X 若可分解为两个非负上鞅之差，则必有 Krickeberg 分解.

34. 证明适应 r.v. 序列 $X=\{X_n, n\in N\}$ 可表为两个非负上鞅之差的充要条件为

i) 对每个 n，$\mathsf{E}|X_n|<\infty$；

ii) $\sup\limits_n\{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\mathsf{E}|X_j-\mathsf{E}(X_{j+1}|\mathscr{F}_j)|+\mathsf{E}|X_n|\}<\infty$.

35. 设 $\{(\Omega_n, \mathscr{F}_n), n\geqslant 1\}$ 为一列可测空间，P_n，Q_n 为 $\mathscr{F}_n$ 上两个概率测度，又 $(\Omega, \mathscr{F})=\mathop{X}\limits_{n=1}^{\infty}(\Omega_n, \mathscr{F}_n)$，$P=\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}P_n$，$Q=\mathop{X}\limits_{n=1}^{\infty}Q_n$，$\rho(P, Q)$ 按题 6 规定，试证：

i) $\rho(P,Q)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\rho(P_n,Q_n)$；

ii) $P\perp Q$ 充要的是 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\rho(P_n,Q_n)=0$；

iii) 若 $(\Omega_n, \mathscr{F}_n)=(\overline{\Omega}, \overline{\mathscr{F}})$，$P_n=\overline{P}$，$Q_n=\overline{Q}$，则或者 $P=Q$，或者 $P\perp Q$.

36. 若 $Z=\{Z_n, n\in N\}$ 为可积 r.v. 序列，试证对有界停时 T 成立.

$$\mathsf{E}Z_T-\mathsf{E}Z_0=\mathsf{E}\{\sum_{n<T}\mathsf{E}(Z_{n+1}|\mathscr{F}_n)-Z_n\}.$$

37. 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差序列，则

i) 在 $\Omega_0=\{\sum\limits_n\mathsf{E}(Y_n^2|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}$ 上，$\sum\limits_n Y_n$ a.s. 且 L^2 收敛；

ii) 若 $\sup\limits_n|Y_n|\in L^2$，则 $P(\Omega_0\triangle\{\sum\limits_n Y_n$ 收敛有限$\})=0$.

38. 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差序列，$U=\{U_n, n\in N\}$ 为非负可料递增序列，则在 $\Omega_1=\{\lim\limits_n U_n=+\infty, \sum\limits_n U_n^{-2}\mathsf{E}(Y_n^2|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}$ 上，$\lim\limits_{n\to\infty}U_n^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}Y_j=0$ a.s.

39. 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差序列，记 $D_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\mathsf{E}(Y_j^2|\mathscr{F}_{j-1})$，则在 $\{\sum\limits_n\mathsf{E}(Y_j^2|\mathscr{F}_{j-1})=+\infty\}$ 上，对任一 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}Y_j/D_n^{\frac{1}{2}}(\log D_n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}=0 \text{ a.s.}.$$

40. 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为鞅差序列，$\sup_n |Y_n| \in L^1$，则在

$\{\sum_n Y_n$ a.s. 收敛有限$\}^c$ 上，$\varliminf_n \sum_{j=1}^n Y_j=-\infty$，$\varlimsup_n \sum_{j=1}^n Y_j=+\infty$，a.s..

41. 设对每个 n，$\{A_j^{(n)}, 1\leqslant j\leqslant k_n\}$ 是 Ω 的一个 $\mathscr{F}$ 可测分割，且每个 $A_i^{(n+1)}$ 是某个 $A_j^{(n)}$ 的子集。记 $A_n(\omega)$ 为 $\{A_i^{(n)}\}$ 中包含 ω 的那个 $A_i^{(n)}$。又 P, Q 为 $\mathscr{F}$ 上两个概率测度。若 $Q\ll P$，试证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q(A_n(\omega))}{P(A_n(\omega))} \quad \text{a.s. 存在.}$$

42. 设 $X=\{X_n, n\in \overline{N}\}$ 为可积r.v.序列，则 X 为一致可积鞅的充要条件是对每个 $T\in \mathscr{T}$，$\mathbf{E}X_T=\mathbf{E}X_0$。

43. 若 $Y=\{Y_n, n\in N\}$ 为非负 r.v. 序列，$T\in\mathscr{T}$，证明

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^T Y_j\Big)=\mathbf{E}\Big(\sum_{j=1}^T \mathbf{E}(Y_j|\mathscr{F}_{j-1})\Big).$$

44. 若 $X=\{X_n, n\in N\}$ 为鞅，则对任意 $c>0$ 成立

$$P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|\geqslant 2c)\leqslant P(|X_n|\geqslant c)+\int_{\{|X_n|\geqslant 2c\}}(c^{-1}|X_n|-2)dP$$

$$\leqslant \frac{1}{c}\int_{\{|X_n|\geqslant c\}}|X_n|dP.$$

常用符号一览表

$\Rightarrow$ (1)必要性(2) $A \Rightarrow B$ 表由 A 可推出 B

$\Leftarrow$ 充分性

$\Leftrightarrow$ $A \Leftrightarrow B$ 表 A, B 等价

$\to$ 不同意义下收敛于极限

$\xrightarrow{p}$ 依概率收敛于极限 2.4.8

$\xrightarrow{L^p}$ L^p 收敛 2.4.15, 2.4.21

$\uparrow$ 不减地收敛于极限

$\downarrow$ 不增地收敛于极限

$\triangleq$ $A \triangleq B$ 表示以 B 规定 A(或以 A 规定 B)

$\sim$ 表示等价或测度相互等价 4.1.9

$\perp$ 测度间相互奇异 4.1.9

$\ll$ 测度绝对连续 4.1.9

$\vee$ (1) $a \vee b = \max(a, b)$ (2) $\mu_1 \vee \mu_2$ 4.1.5. (3) $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2 = \sigma(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2)$

$\wedge$ (1) $a \wedge b = \min(a, b)$ (2) $\mu_1 \wedge \mu_2$ 4.1.5.

$\subset$ 集合包含关系 1.1.1

$\cup$ 集合并 1.1.1

$\cap$ 集合交 1.1.1

A^c A 的余集 1.1.1

$\setminus$ 集合差 1.1.1

N 非负整数全体 3.4.1

$\mathscr{F}_1/\mathscr{F}_2$ 1.4.5

a.e. 几乎处处 2.4.1

a.s. 几乎必然 2.4.1

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}_E$ $\mathscr{B}_R$ Borel 域(E 上或 R 上的 Borel 域) 1.1.22

cov(·,·) 协方差 2.4.27

$E(\cdot)$ 期望 2.3.10

esup, esssup 本性上确界

$\mathscr{F}$ 事件域 1.1.5, 1.3.2

$\mathscr{F}_T$ T 前事件域 3.4.6

i.i.d 独立同分布 3.3.3

参 考 书 目

[1] Neveu, J., Mathematical fundations of the calculus of probability, Holden-Day Inc. 1965.
[2] Chow, Y.S. and Teicher, H., Probability Theory, Springer-Verlag, New York Inc. 1978.
[3] Dellacherie, C and Meyer, P., Probabilities and Potential, North-Holland Publishing Co., Herman, Paris, 1978.
[4] 严加安，鞅与随机积分引论，上海科技出版社，1981.
[5] 复旦大学编，概率论，第一部分：概率论基础，人民教育出版社，1980.
[6] 夏道行、严绍宗等，实变函数论与泛函分析，人民教育出版社，1980.